

ONDE NEL PIANO



(foto Nuova Avioriprese Srl)

*Perché sa, a me il mare non è mai piaciuto: si muove sempre, ci fa umido, c'è l'aria molle e marinosa, insomma non mi dà fiducia e mi fa venire le lune.
(Primo Levi, La chiave a stella)*

AA 2017-2018

Manuale dell'US Army Corps of Engineers: <http://bit.ly/CEMUSARMY>

"Atlante delle Coste": www.isprambiente.it/it/servizi-per-lambiente/stato-delle-coste/atlante-delle-coste

https://en.wikipedia.org/wiki/Airy_wave_theory

Appunti di Enrico Foti, Università di Catania: www.dica.unict.it/users/efoti/ing_cost/ing_cost_lez.htm

La responsabilità di ogni inesattezza derivante dall'adattamento è ovviamente solo nostra-

Le parti **marcate** in blu o azzurro **o inquadrate** non sono comprese nel programma; si tratta di approfondimenti o curiosità (Facoltative) che servono per dare continuità al discorso e per assicurare gli studenti più precisi.

Per le applicazioni **bisogna saper rintracciare le formule necessarie**

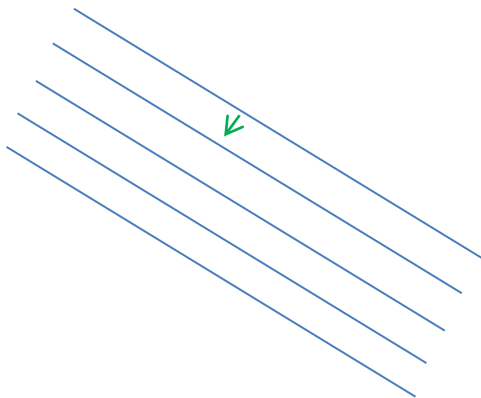
In corsivo le parti da svolgere autonomamente come esercizio (parte del programma)

PREMESSA

Quanto scritto nei paragrafi precedenti riguarda un'onda in una sola dimensione spaziale (x , con i simboli che abbiamo adottato), mentre nella realtà la propagazione sulla superficie marina si sviluppa in due dimensioni. Dal punto di vista concettuale, vista la linearità di tutta la trattazione, la generalizzazione è semplice, considerando che un'onda in una direzione generica si può proiettare su assi ortogonali x, y , entrambe le componenti si possono trattare con le equazioni considerate finora, e le soluzioni si possono poi sommare. Questo approccio matematico viene seguito nei modelli di calcolo più complessi, di cui si dirà qualcosa nel seguito

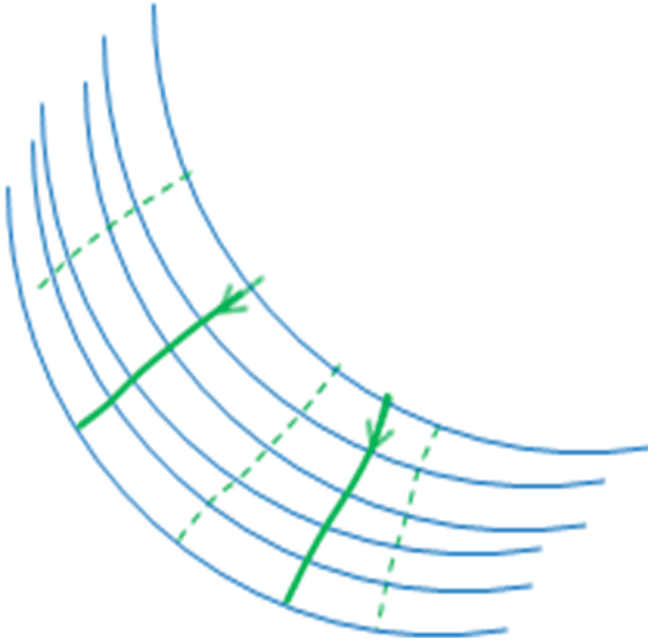
Considereremo per ora invece gli aspetti fisici del movimento dell'onda sulla superficie del mare, utilizzando concetti e strumenti matematici semplici, che hanno il merito di essere abbastanza intuitivi, e di costituire la base di strumenti progettuali ancor'oggi largamente usati.

Immaginiamo dunque un treno d'onda di Airy/Stokes I, che si muove sulla superficie del mare. Per visualizzarla dall'alto, immaginiamo di marcare tutti i punti di egual fase - ad esempio, tutte le creste, o tutti i cavi. Si ottengono così i "fronti d'onda" (anche: "piani d'onda");



se essi sono rettilinei è facile comprendere che tutto quanto studiato finora si applica tal quale - basta prendere come " x " la normale ai piani d'onda (direzione indicata dal vettore verde). Il vettore verde si chiama anche vettore d'onda, e le linee perpendicolari ai piani d'onda si chiamano "raggi".

I piani d'onda (in blu nelle figure) possono però essere anche curvi: se la curvatura non è eccessiva, i risultati dell'onda mondimensionale si possano trasferire, non più lungo una retta, bensì lungo una serie di curve ("raggi", linee verdi spesse nelle figure seguenti) ortogonali localmente ai fronti.

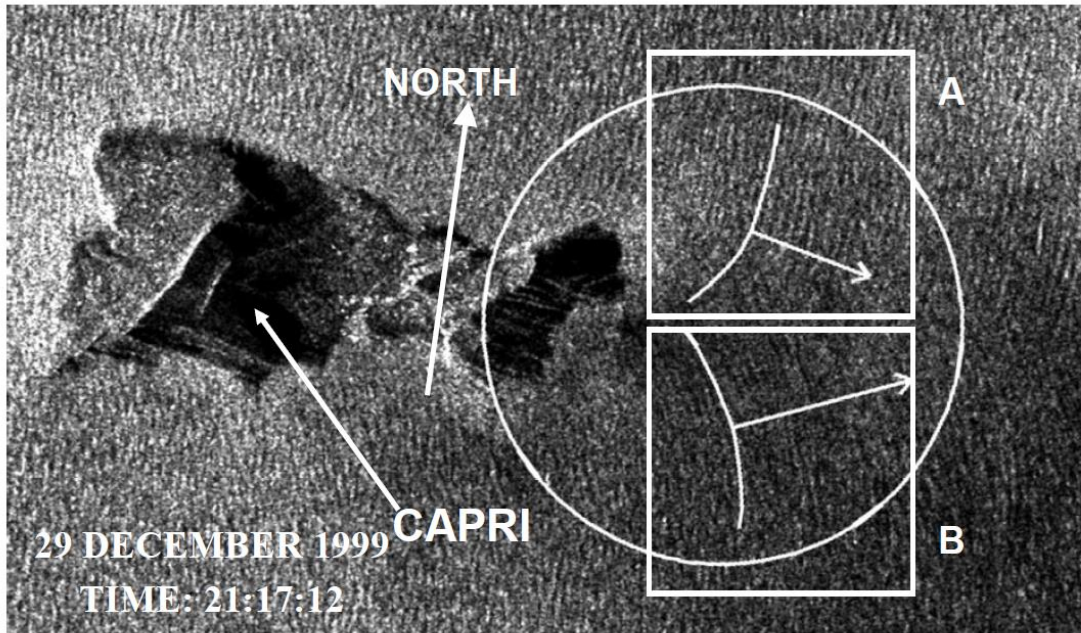


Si ipotizza quindi che, lungo strisce nella direzione di propagazione (indicate con linee verdi tratteggiate), perpendicolari ai fronti d'onda, l'onda si comporti "quasi" come l'onda studiata finora; purché naturalmente la curvatura lungo il percorso non sia eccessiva¹

Quando le onde si muovono su una batimetria variabile in acque "non profonde" (*si ricordi il significato di questa espressione*) la celerità varia nei diversi punti del fronte in funzione della profondità e quindi questo si deforma. I fronti e i raggi quindi ruotano, Questo effetto si chiama "rifrazione"

¹ Il raggio di curvatura deve essere notevolmente più grande della lunghezza d'onda

RIFRAZIONE



Le immagini mostrano la rotazione dei fronti d'onda a causa dell'effetto del fondo. In questo caso si tratta di onde molto lunghe (swell) onde per cui il rapporto tra lunghezze e fondale è relativamente basso

NOTA1: Tutto quanto segue, si riferisce a situazioni stazionarie: ma il concetto di "stazionario" nel moto ondoso si deve considerare relativo a scale di tempo lunghe rispetto al periodo d'onda, poiché evidentemente l'onda è di per se un fenomeno non stazionario

NOTA 2 In tutto quanto segue, si assume che non ci siano correnti, cioè movimenti costanti e lentamente variabili nel tempo della massa d'acqua.

Nel seguito si illustrerà come si ricostruisce il percorso dei treni d'onda nel loro avvicinarsi alla terra emersa individuando la linea lungo cui si propaga localmente l'onda: il cosiddetto calcolo dei raggi d'onda (una forma lievemente diversa va sotto il nome più tradizionale di "calcolo dei piani d'onda", in cui si considerano non i raggi ma le linee ad essi ortogonali, e cioè i fronti d'onda). Il vincolo di "curvatura non eccessiva" è essenziale

Concettualmente abbastanza semplici, questi calcoli sono basati sul legame tra lunghezza d'onda e profondità (l'equazione della dispersione vista prima) e sulla legge di **Snell** (analoga a quella dell'ottica), che governa l'angolo Θ formato dal vettore di propagazione con il gradiente della batimetria del raggio d'onda²

Se in un determinato punto 1 la celerità è C_1 e l'angolo è θ_1 , e nel punto 2 gli stessi parametri sono C_2 e θ_2 , si ha

$$\frac{C_1}{\sin(\theta_1)} = \frac{C_2}{\sin(\theta_2)}$$

ovvero

$$\sin(\theta_1) = \frac{C_1 \sin(\theta_2)}{C_2}$$

Per comprendere quest' effetto, conviene considerare una situazione semplice: isobate rettilinee e parallele, ed una variazione di profondità schematizzata come uno scalino. La celerità C varia tra 1 e

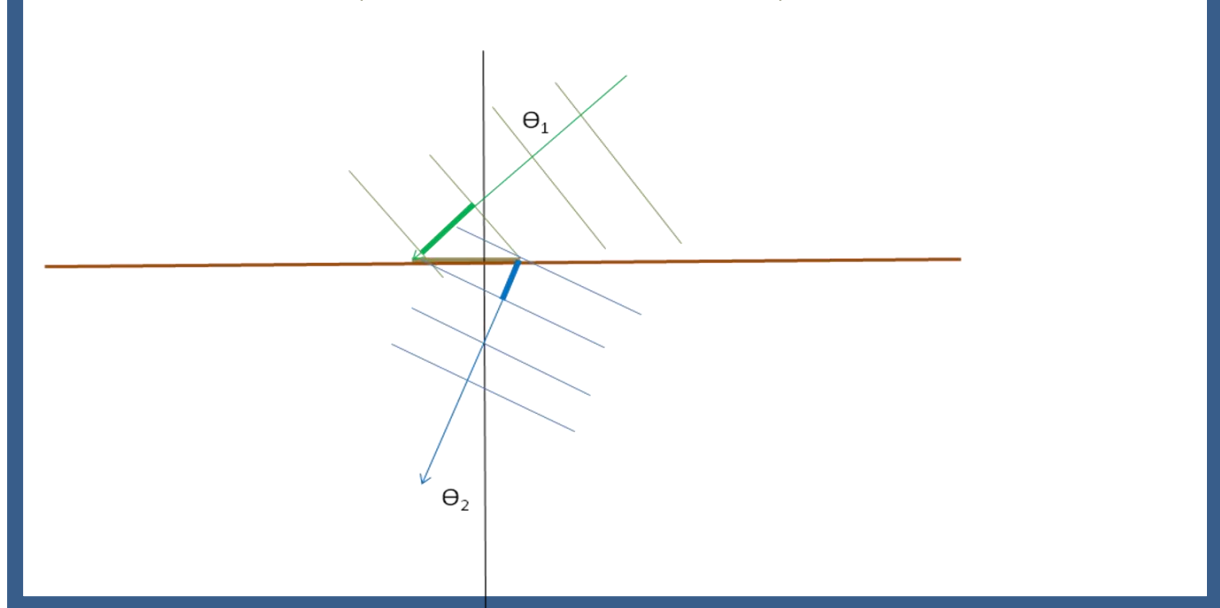
² E' la linea di massima pendenza. In in una batimetria rettilinea ed uniforme coincide con la perpendicolare alla costa

2 a causa della variazione profondità, questo provoca, nell' avvicinarsi alla costa, la rotazione del vettore lungo cui si propaga il moto ondoso (**rifrazione**) secondo la legge indicata prima

La cosa è facilmente verificabile nella figura seguente: si ha una variazione di profondità e quindi di celerità da C_1 a C_2 . I fronti d'onda (linee sottili grigie e azzurre) formano con l' isobata (marrone) un angolo θ_1 ; dopo la rotazione l'angolo è θ_2 . (NB: l'angolo θ compreso tra fronti d'onda (e isobata) è eguale a quello compreso tra raggio d'onda e gradiente delle isobate).

I fronti d'onda ruotano ma la lunghezza d'onda (distanza tra due fronti) lungo la linea marrone, proiettata lungo le due direzioni di propagazione deve dare le due lunghezze dei due rispettivi sistemi d'onda. Quindi $L \sin\theta_1 = L_1$ e $L \sin\theta_2 = L_2$ e dunque:

$L_1 / \sin\theta_1 = L_2 / \sin\theta_2$. Poiché il periodo si conserva la stessa relazione vale per le celerità



Questo fenomeno è importante perché fa sì che la direzione d'arrivo dell'onda sulla costa e sulle opere sia diversa da quella al largo (in particolare, se la celerità diminuisce, come succede muovendosi verso profondità più basse) l'angolo diminuisce.

Un altro effetto importante, immediata conseguenza del precedente è la convergenza o la divergenza dei raggi vicini con conseguente concentrazione o riduzione della densità di energia e quindi dell'altezza d'onda in moto verso il litorale. Detta infatti b la distanza tra due raggi d'onda, si ha infatti, anche

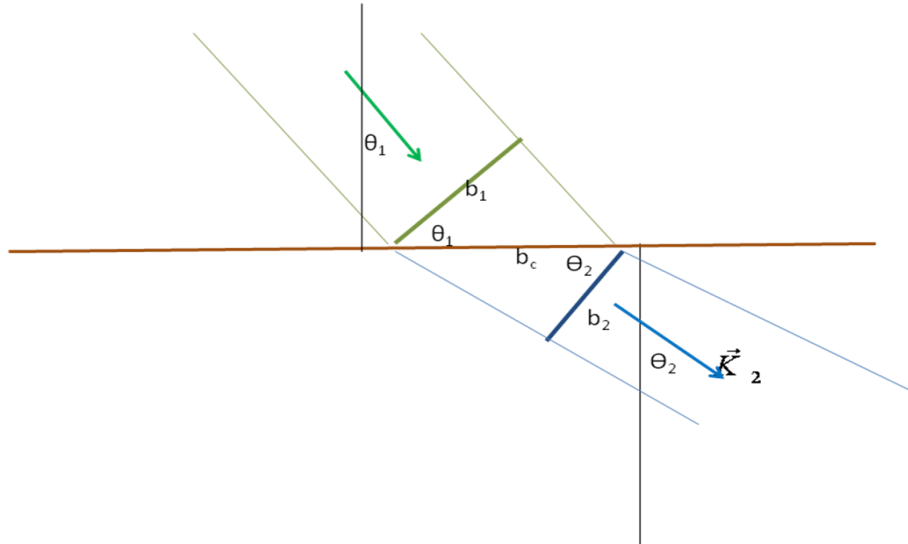
$$\frac{b_1}{\cos(\theta_1)} = \frac{b_2}{\cos(\theta_2)}$$

ovvero

$$b_2 = b_1 \frac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_2)}$$

Per comprendere questo secondo aspetto, conviene ancora considerare la stessa situazione schematica di prima. (la grafica è però differente). Il fronte d'onda di larghezza b_1 (linea spessa verde), forma con una isobata un angolo θ_1 ; dopo la rotazione dovuta alla variazione di profondità la stessa distanza e lo stesso angolo sono b_2 e θ_2 rispettivamente (NB: l'angolo θ compreso tra fronte d'onda e isobata è eguale a quello compreso tra raggio d'onda e gradiente delle isobate).

K_1 e K_2 sono i vettori d'onda



Considerando una striscia di larghezza b si ricava che è:
 $b_c \cos\theta_1 = b_1$, $b_c \cos\theta_2 = b_2$ e quindi: $b_1 / \cos\theta_1 = b_2 / \cos\theta_2$

Nel caso illustrato sopra la striscia delimitata dal fronte d'onda si restringe, e poiché il flusso di energia resta costante, l'altezza d'onda deve aumentare.

A titolo di esempio, ed a scopo mnemonico, consideriamo che cosa succede ad un raggio d'onda che si dirige verso la spiaggia: la celerità diminuisce per fondali più bassi quindi $\theta_2 < \theta_1$ e il raggio d'onda tende a diventare perpendicolare alla spiaggia. *verificare numericamente*

Considerare ancora che se $\theta_2 < \theta_1$ segue che $\cos\theta_2 > \cos\theta_1$ e dunque $b_2 > b_1$

In formule: per verificare l'effetto sull'altezza d'onda, si impone che il flusso di energia F di un treno d'onda si mantenga costante tra due sezioni b_1 e b_2 , generalizzando quanto si è visto nel caso monodimensionale (in questo caso la larghezza b varia):

$$F_1 b_1 = F_2 b_2$$

$$\rho \cdot g / 8 \cdot H_2^2 \cdot Cg_2 \cdot b_2 = \rho \cdot g / 8 \cdot H_1^2 \cdot Cg_1 \cdot b_1$$

e quindi:

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{Cg_1}{Cg_2}} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \quad **$$

e ancora

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{Cg_1}{Cg_2}} \sqrt{\frac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_2)}} \quad (***)$$

E' comodo talvolta riferirsi ai valori al largo: H_0 , Cg_0 , rispetto ai quali vien quindi calcolato il valore H generico.

$$H = H_0 \sqrt{\frac{G_{g_0}}{C_g}} \sqrt{\frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}} \quad (****)$$

$\sqrt{\frac{G_{g_0}}{C_g}}$ è naturalmente il coefficiente di shoaling K_s visto prima

Si pone quindi

$$K_r = \sqrt{\frac{b_0}{b}} = \sqrt{\frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}} \quad (\text{coefficiente di rifrazione}) \quad (****\text{bis})$$

I due effetti (rifrazione e shoaling) coesistono e quindi il legame tra le altezze d'onda in due punti H e H_0 è dato da

$$H = H_0 \cdot K_s \cdot K_r$$

Verificare numericamente

Ricordare i valori di C ed n per acque profonde ed acque basse!

Questo stesso risultato è riportato nel Manuale dell' US Army Corps of Engineers: II-3-9 e seg., un riferimento molto importante per le applicazioni. Non è obbligatorio, ma è utile saperlo utilizzare

Risulta chiara quindi l'importanza di valutare la trasformazione dell'onda dal largo verso costa; pure essendo tutto quanto esposto sopra una semplice conseguenza della teoria lineare, i concetti fisici appaiono evidenti, e le tecniche descritte sono adeguate anche nella maggior parte dei casi reali.

Nella pratica, a causa delle inevitabili irregolarità della batimetria o delle interpolazioni numeriche, non è opportuno basarsi sul comportamento di soli due raggi, bensì conviene considerarne il comportamento medio su un congruo numero.

La rifrazione si può trattare facilmente, congiuntamente allo shoaling, con le procedure *svolte ad esercitazione sui fogli excel. che sono relative a batimetrie rettilinee e parallele.* Come si vedrà dai risultati, gli effetti del fenomeno non sono in questo caso molto rilevanti. Per onde lunghe e batimetrie particolari le conseguenze possono invece essere imponenti: si veda ad esempio <http://www.surfertoday.com/surfing/8247-the-mechanics-of-the-nazare-canyon-wave>

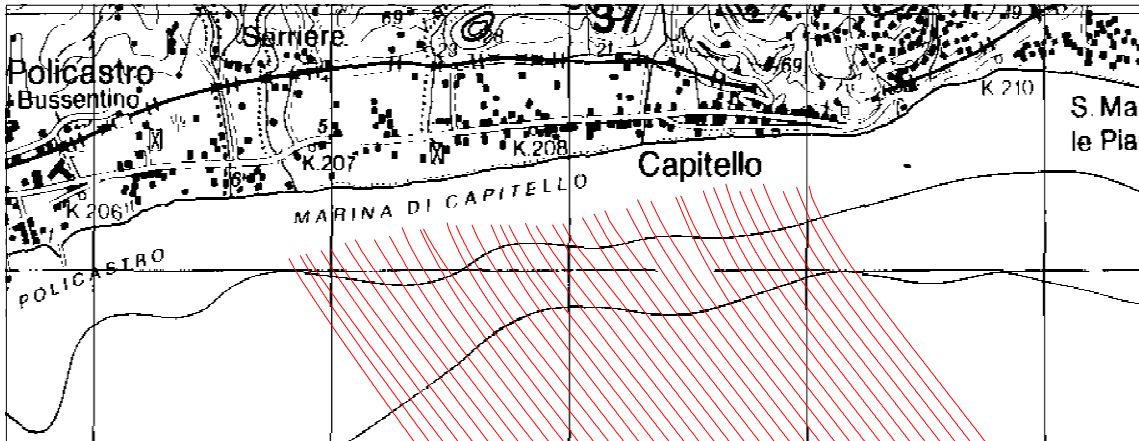
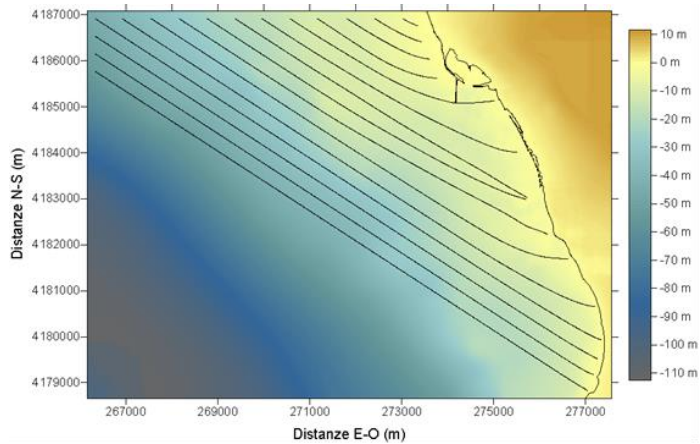
Nei casi in cui la batimetria reale è complessa, la conformazione del fondale è dunque molto rilevante e questa analisi va normalmente svolta per ogni progetto importante.

Il calcolo dei raggi d'onda nel caso generale richiede un software più elaborato, e può essere applicato in due modi diversi:

- diretto, e cioè dal largo verso costa; in questo caso si applica la tecnica per un certo numero di raggi, al largo paralleli ed equidistanti e si seguono verso terra fino alla rottura. Questo metodo è più accurato ma più gravoso, poiché deve essere ripetuto per ogni direzione (ad esempio, ad intervalli di 5° o 10°)

- inverso, (o a ventaglio), in cui si individua un punto su basso fondale in vicinanza dell'opera, e si seguono i raggi d'onda in arrivo da diverse direzioni, verso il largo.

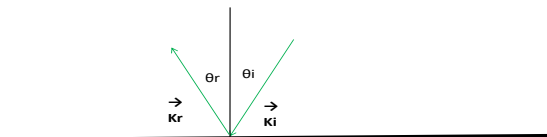
Come si vede dai disegni – relativi ad calcolo diretti - in alcuni punti i raggi si avvicinano, ed in altre si allontanano.



Questi calcoli sono inglobati nei sistemi software più recenti, di cui si parlerà in seguito

RIFLESSIONE (BIDIMENSIONALE)

In presenza di coste alte o di opere a mare verticali sono importanti anche gli effetti di riflessione. Dal punto di vista planimetrico le onde sinusoidali di Airy seguono infatti le leggi dell'ottica geometrica (angolo di riflessione del vettore propagazione eguale all'angolo di incidenza)



$$\theta_i = \theta_r$$

La riflessione non è però mai totale, nel senso che l'energia (e cioè l'altezza d'onda H_r) dell'onda riflessa è sempre minore di quella dell'onda incidente di altezza H_i ; si può definire un coefficiente di riflessione K_r

$$H_r = H_i * K_r$$

Per una superficie perfettamente riflettente come ad esempio un muro verticale si ha $K_r=1$ (o quasi). Una spiaggia con una pendenza ridotta risulta in generale un dissipatore di energia con K_r normalmente piccolo o nullo. Per altre strutture K_r può essere assegnato utilizzando formule empiriche o valori misurati, e questo criterio è generalmente adeguato per lo studio degli effetti del moto ondoso nei porti, a distanza di qualche lunghezza d'onda dalla parete riflettente.

DIFFRAZIONE-RIFLESSIONE



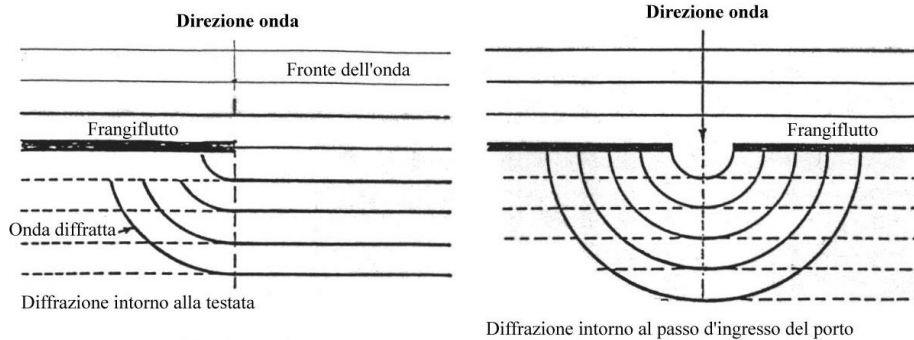
Gli effetti definiti fin qua (rifrazione, shoaling) descrivo in maniera soddisfacente il comportamento di un campo di onde con fondale e con contorni gradualmente variati. Ma la propagazione per raggi non è accettabile in vicinanza di brusche variazioni dei contorni: dove per vicinanza si intende "dell'ordine della lunghezza d'onda" o inferiore.

Un tipico esempio è il campo di moto ondoso nella zona d'ombra a valle di un ostacolo che intercetta un treno d'onde incidenti. La parola diffrazione rende bene il senso, anche perché gli stessi fenomeni avvengono per le onde elettromagnetiche, e quindi per la luce. Se le onde continuassero a muoversi lungo un raggio ben definito, nella zona sottoflutto si avrebbe perfetta calma, mentre ai lati di essa le onde procederebbero senza cambiare né forma né altezza. Una situazione curiosa, e ovviamente fisicamente impossibile, come appunto la mezza tazza di tè di Alice.

La diffrazione è dunque l'effetto per cui il moto ondoso si modifica per la presenza di ostacoli e non esiste in questo caso una direzione di propagazione ben definita, quindi non ci sono raggi e creste, e l'altezza d'onda H non evolve gradualmente lungo un raggio d'onda. Il fenomeno è totalmente bidimensionale.

La foto aerea all'inizio del capitolo mostra vari situazioni complesse tra cui anche quella della diffrazione.

La figura successiva mostra invece due esempi molto semplici.



Il calcolo della diffrazione è importante, per esempio, per la determinazione delle altezze d'onda in un porto o in un bacino protetto ed è quindi essenziale nella progettazione dei bacini portuali.

Si aggiunga a questo quanto visto nel capitolo precedente per la riflessione: se cerchiamo di utilizzare gli stessi strumenti analitici relativi alle onde di lunghezza infinita, troviamo un' incongruenza. Diffrazione e riflessione in spazi limitati si trattano dunque insieme

Per lo studio di questi problemi, si assume dunque una funzione $f(x,y)$ detta **“funzione d'onda”**, che ha sostanzialmente il ruolo di un' altezza d'onda locale, relativa a ciascun punto x,y . L'altezza istantanea d'acqua η assume allora la forma

$$\eta = a \cdot f(x, y) \cdot \cos(\sigma t + \psi(x, y))$$

in cui $f(x,y)$ (funzione d'onda) descrive le variazioni sul piano orizzontale di η rispetto al livello di quiete ed a è l'ampiezza d'onda di riferimento (ad esempio $a=H/2$, essendo H l'altezza d'onda al largo), σ è la frequenza. Si vede che scompare il concetto di propagazione dell'onda: tutti i punti del piano si muovono verticalmente con frequenza σ ed ampiezza $f(x,y)$; il movimento non è in fase (non si sollevano tutti simultaneamente: ognuno ha una propria fase)

La funzione d'onda $f(x,y)$ verifica l'equazione:

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla F) + \sigma^2 \left(\frac{C_g}{C} \right) F = 0$$

(Mild Slope Equations, Berkoff 1972)

Con

$F(x,y) = f(x,y) + i \psi(x, y)$ (funzione complessa)

C = velocità di fase

C_g = velocità di gruppo = $C \cdot n$

(La fase $\psi(x, y)$ non compare in modo esplicito perché la variabile $F(x,y)$ è complessa)

L'equazione sopra rappresentata è un'equazione di tipo ellittico (devono essere assegnate condizioni al contorno su tutta la frontiera) e si risolve con procedimenti numerici. Le condizioni al contorno rappresentano lo stato di mare all'esterno della zona considerata, caratterizzate dunque da un'altezza d'acqua $\eta_o(t)$, con un'ampiezza di oscillazione H_o ed una frequenza σ oltre che dalla direzione di propagazione.

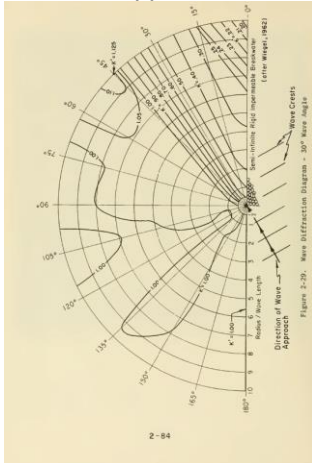
Una volta trovata la $f(x,y)$ e quindi la $\eta(x,y)$, gli altri elementi di interesse (ad es. le velocità, le pressioni) si trovano attraverso funzioni della sola z , in maniera analoga a quanto visto per le onde unidirezionali.

La funzione $Z(z)$ può essere espressa nella forma:

$$Z(z) = - \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}$$

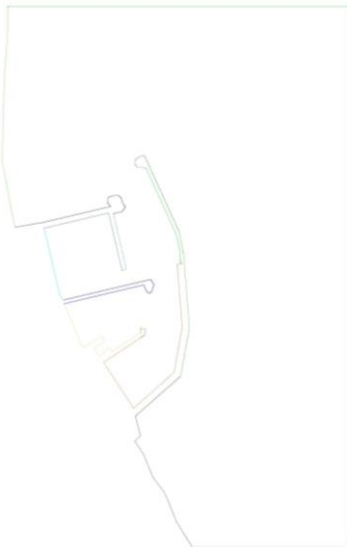
simile a quella relativa alle onde unidirezionali, che fornisce la variazione dei parametri idrodinamici con la profondità z ;

Tradizionalmente si usavano dei diagrammi che forniscono le soluzioni per geometrie semplici ma di interesse applicativo: ad esempio, un molo su cui arriva un fronte d'onda con una certa direzione:



Questi diagrammi (di Wiegner) non sono più in uso a causa della diffusione di sistemi software specializzati.

Il seguente esempio è invece relativo ad un caso reale³, risolto con l'equazione riportata sopra, in cui l'onda proviene da di 150° e 225° con periodi variabili da 7 a 13 secondi, ed un'altezza H=1m. Le diverse parti del porto hanno diversi coefficienti di riflessione:



A costa 20 %

B mantellata
35%

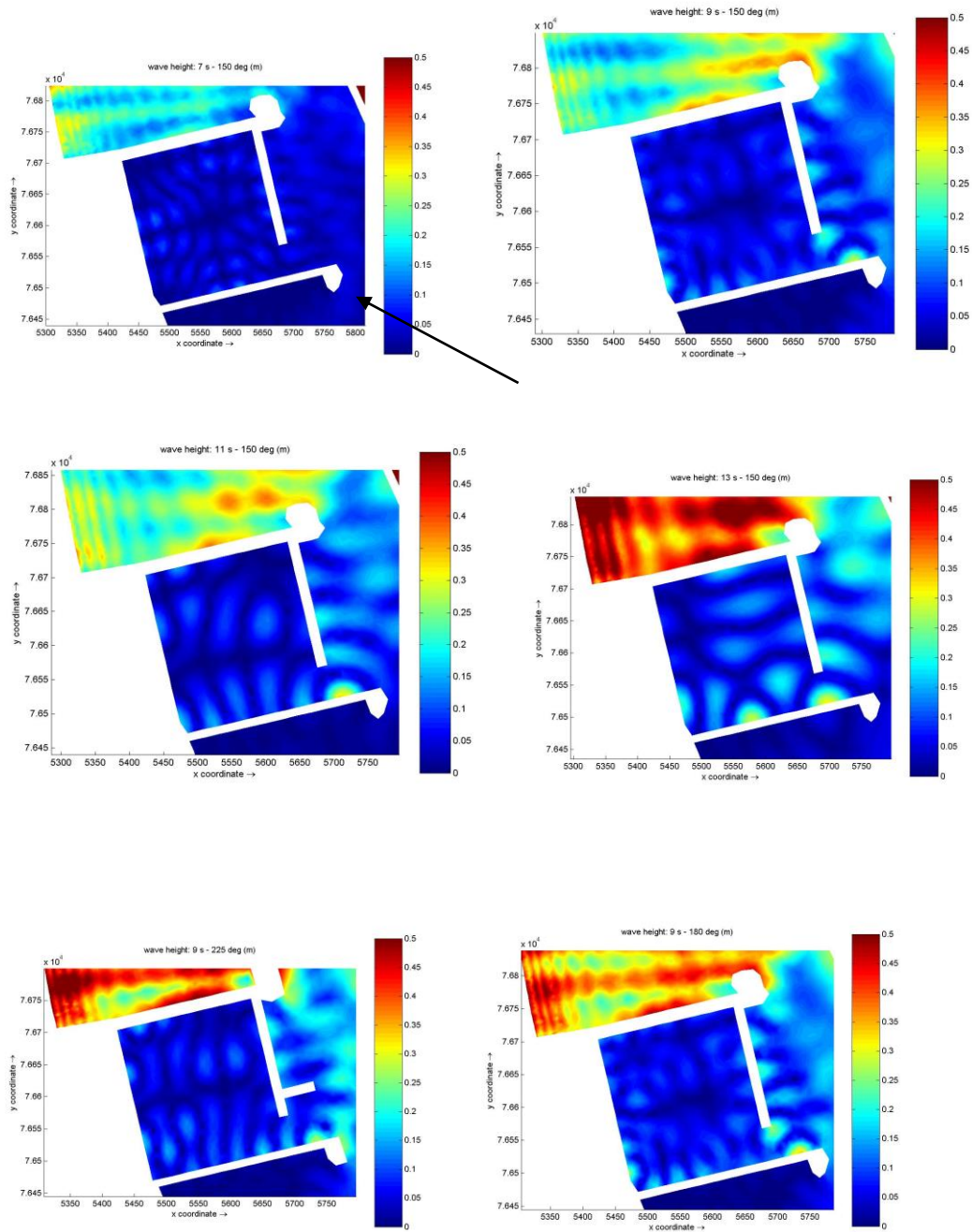
C1 porto_a1 60
%

C porto 100%

D porto_a2
100%

Le figure riportano con una scala di colori il valore della funzione d'onda (e cioè della sua altezza). Si nota l'attenuazione dell'agitazione nella zona protetta dal molo e le zone di riflessione antistanti il molo (molto riflettente).

³ risolto con il software PHAROS prodotto da Deltares Delft Hydraulics



L'attenuazione varia a seconda del periodo dell'onda. Si nota, infatti, nelle prime quattro figure, relative ad un'unica direzione di provenienza, che maggiore è il periodo (dunque minore σ), maggiore è la penetrazione dell'onda all'interno del porto.

Altre immagini e un esempio applicativo si trovano su

www.eugeniopc.it/investigacion/papers/PresentazioneEPCetalHamamet7.pdf