

AA 2017-2018 ONDE REALI



Mare agitato con creste di schiuma – Da circa 300 m di quota

AA 2017-2018

Questi appunti contengono parti tratte dalle dispense

Manuale dell'US Army Corps of Engineers: <http://bit.ly/CEMUSARMY>

"Atlante delle Coste": www.isprambiente.it/it/servizi-per-lambiente/stato-delle-coste/atlante-delle-coste

Appunti di Enrico Foti, Università di Catania: www.dica.unict.it/users/efoti/ing_cost/ing_cost_lez.htm

La responsabilità di ogni inesattezza derivante dall'adattamento è ovviamente solo nostra-

Il lavoro di elaborazione dei dati ondametrici è stato svolto da Pino Spulsi, le elaborazioni sui dati spettrali sintetici da Ferdinando Reale
La responsabilità di ogni inesattezza derivante dall'adattamento è ovviamente solo nostra-

Le parti **marcate in blu o azzurro** o **inquadrate** non sono comprese nel programma; si tratta di

approfondimenti o curiosità (facoltative) che servono per dare continuità al discorso e per assicurare gli studenti più precisi.

Per le applicazioni **bisogna saper rintracciare le formule necessarie**

Le parti in corsivo sono da svolgere autonomamente come esercizio

PREMESSA

Tutto quanto esaminato finora riguarda lo studio di un treno d'onde lineare e sinusoidale, cioè di un'astrazione che in certe situazioni si dimostra aderente alla realtà, ma che in molti altri casi è inadeguata a spiegare quello che avviene realmente.

Inizieremo ora invece da un altro punto di vista, cioè dall'esame di dalle effettive misure in mare del moto ondoso, e svilupperemo su queste misure due diversi approcci: uno empirico, di carattere prevalentemente statistico, un altro analitico spettrale. Alle fine ricondurremo tutti questi punti di vista ad una visione unica

Misure del moto ondoso in mare

La forma delle onde che si generano in mare sotto l'azione del vento è estremamente complessa; l'esperienza comune, così come le registrazioni effettuate in campo, indicano che le altezze, i periodi, le lunghezze d'onda e le direzioni di propagazione delle onde reali risultano variabili in maniera caotica anche.

La maggior parte rilievi del moto ondoso sono effettuati con ondometri, cioè con apparecchiature che registrano l'altezza istantanea d'acqua $\eta(t)$ in un punto ben definito. La $\eta(t)$ viene ovviamente campionata e registrata in maniera discreta ($\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_i \dots \eta_n$) con un frequenza di 2-4 Hz (= 2-4 volte al secondo).

Attenzione a non confondere l'altezza d'acqua istantanea $\eta(t)$ con l'altezza d'onda H!



Gli ondometri sono di diversi tipi:

Boe ondometriche:

Le boe, ancorate con un ancoraggio molto flessibile solitamente su fondali abbastanza profondi (oltre 60 metri) <http://www.eugeniopc.it/investigacion/res4.htm> seguono la superficie libera dell'onda: l'andamento temporale dell'altezza dell'acqua istantanea $\eta(t)$ si ottiene a partire dalla misura dell'accelerazione. I parametri di interesse vengono ritrasmessi ad una stazione ricevente e successivamente vengono elaborati e resi disponibili per le applicazioni in tempo reale e per le analisi. Le acquisizioni vengono normalmente svolte ogni mezz'ora, e durano ciascuna di 20'-30'

La maggior parte delle stazioni di misura della Rete Ondometrica Nazionale (www.idromare.it) erano di questo tipo. La rete non è più funzionante dalla fine del 2014

[Il sito dell'ISPRA – ex ANPA ex Servizio Idrografico e Mareografico Nazionale contiene utili informazioni sulla Rete Ondometrica RON e alcuni dati storici.](#)

Alcune regioni, inoltre (Campania, Calabria, Puglia) hanno costituito delle reti ondometriche regionali, che però a causa di problemi economici funzionano solo saltuariamente.

[Un descrizione dell'intero sistema campano e delle sue principali componenti è disponibile sul sito CUGRI \(<http://www.cugri.it>\)](#)

http://www.cugri.it/09_Convegni_seminari/Seminario_17_Dicembre_2012/Seminario17_dicembre_2012_BIAFORE.pdf

http://www.cugri.it/09_Convegni_seminari/Seminario_17_Dicembre_2012/Seminario17_dicembre_2012Cristiano.pdf

In Campania nel 1986 fu installata nel Golfo di Napoli a cura dell'allora Istituto Universitario Navale (ora Parthenope) una delle prime boe ondometriche italiane, che restò operativa per vari anni. Successivamente l'Università Parthenope ed il CUGRI hanno eseguito a scopo di ricerca misure per brevi periodi sia al largo di Salerno che in vicinanza di Sorrento. www.eugeniopc.it/investigacion/res4.htm

Tutti questi sistemi regionali sono attualmente fermi, almeno al Sud, per mancanza di risorse. La Provincia di Salerno mantiene una boa ondometrica installata e gestita con l'assistenza del CUGRI, l'unica attualmente funzionante nell'Italia Meridionale. www.rilevazioneondometrica.provincia.salerno.it/

[Le istituzioni pubbliche di molti paesi forniscono dati in tempo reale. Ad esempio:](#)

www.puertos.es/oceanografia_y_meteorologia/redes_de_medida/index.html
(Spagna)

www.channelcoast.org/data_management/real_time_data/charts/

ad esempio *St Mary's Sound*:

http://www.channelcoast.org/data_management/real_time_data/charts/?chart=113&tab=1Hz%20Data&start=1419580800&end=1419667200&disp_option=
(Regno Unito)

L' "Atlante delle Coste" dell' ARPAC

www.isprambiente.it/servizi-per-lambiente/stato-delle-coste/atlanter-delle-coste
riporta molti utili dati ed elaborazioni relativi alle coste italiane

Misura della altezza d'acqua su palo

Un'altra tecnica frequentemente impiegata è la misura dell'altezza d'acqua $\eta(t)$ attraverso uno strumento montato su un palo. Questo è naturalmente possibile solo su fondali relativamente bassi. Le informazioni sulla direzione si ottengono attraverso la misura delle velocità orbitali $V_x(t)$ e $V_y(t)$ viste in precedenza. Ce ne è uno al largo di Foce Sele, altri due sono stati appaltati dalla Protezione Civile Campania.

Pressione sul fondo

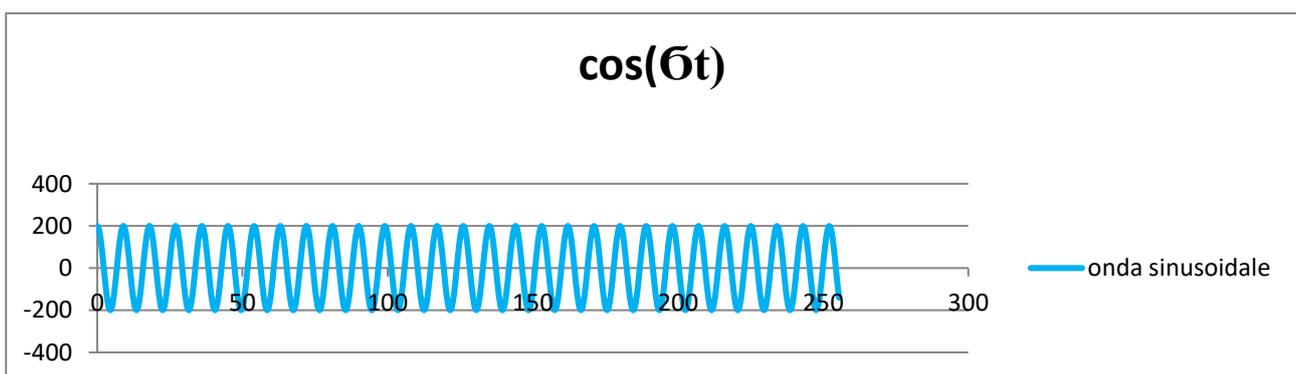
Un altro metodo ancora è quello di misurare la pressione sul fondo attraverso una cella di pressione.(manometro elettronico) Anche qui, se si desidera conoscere la direzione delle onde, si devono eseguire in contemporanea le misure di $V_x(t)$ e $V_y(t)$.

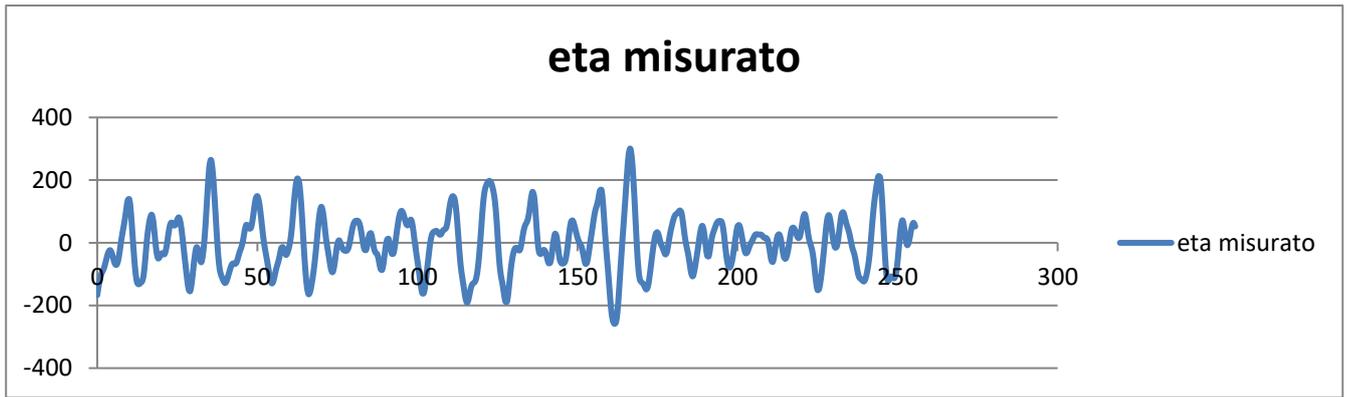
Misure da radar terrestri e satellitari

Le misure a distanza attraverso il radar, sia da terra che da satellite, vanno prendendo sempre più importanza nella pratica operativa. Tuttavia, a differenza dei sistemi in situ (boe, pali, misuratori di pressione) le misure radar (tra cui ci sono quelle satellitari) non forniscono valori istantanei dell'altezza d'acqua, ma direttamente i valori medi degli stati di mare di cui si parla nel seguito. Lo studio di questi argomenti va quindi rimandato a quando tutto il contenuto di questo blocco di appunti sarà stato assimilato.

Studio del moto ondoso in un determinato stato di mare

L'ondametro misura un dato «grezzo» di altezza istantanea d'acqua $\eta_g(t)$. Tale valore deve essere sempre riportato al suo valore medio η_m . Si ha quindi : $\eta(t) = \eta_g(t) - \eta_m$. Ovvio quindi che il valore medio di $\eta(t)$ è =0





Come si vede, $\eta(t)$ è ben diverso dalla semplice sinusoida che avevamo immaginato finora. In un mare reale, caratterizzato da un'agitazione caotica (si dice spesso "casuale", oppure "random") è difficile pure definire il concetto stesso di onda. Si considerano quindi gli "stati di mare", cioè dei periodi di tempo sufficientemente lunghi da comprendere molte onde, ma abbastanza brevi da poter essere considerato mediamente stazionari e di questi stati di mare si cercano le caratteristiche.

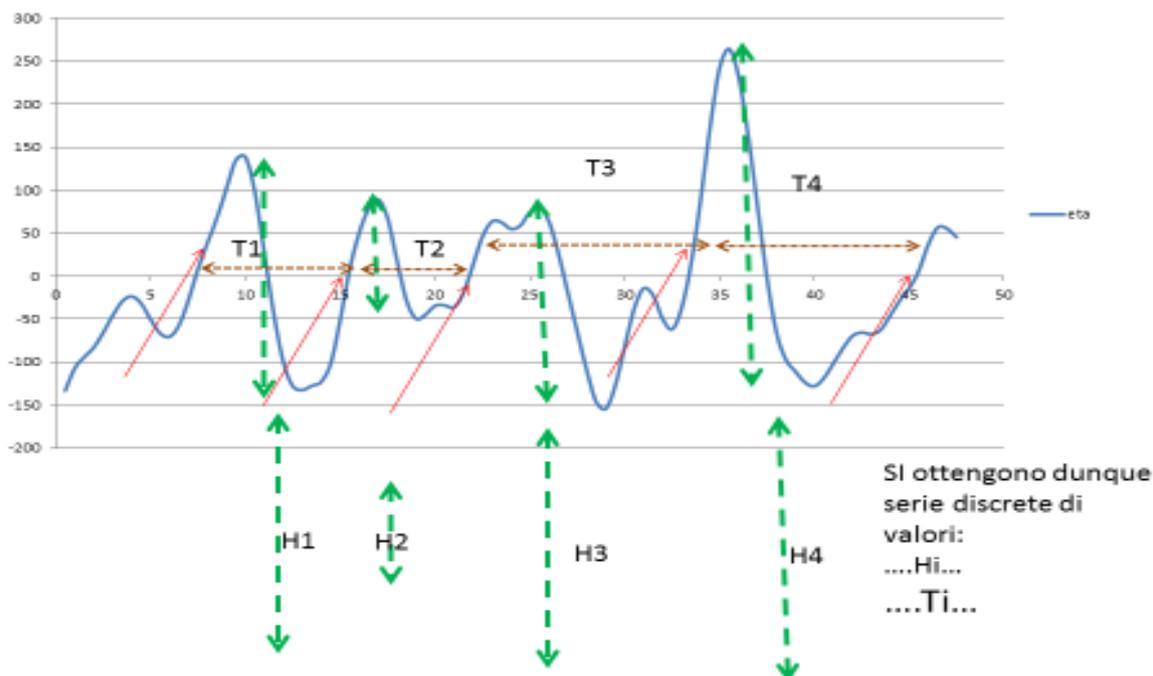
Gli ondometri normalmente effettuano l'analisi dei parametri statistici del moto ondoso per una durata di 20'-30'. Questi sono dunque gli stati di mare che si considerano. L'analisi si fa in due modi, definiti nel seguito "analisi empirica" ed "analisi spettrale". I due approcci si complementano l'uno con l'altro, ed alla fine vengono riportati ad una visione unitaria.

ANALISI STATISTICA EMPIRICA

Occorre in primo luogo definire la singola onda; il criterio più utilizzato è quello dello *zero up-crossing*, (o *down-crossing*) tramite il quale ciascuna l'onda viene individuata da due passaggi consecutivi verso l'alto dallo zero della registrazione di $\eta(t)$

Il procedimento è indicato nella figura seguente e *sarà meglio chiarito nelle esercitazioni*

Si può vedere anche http://en.wikipedia.org/wiki/Wave_height



A partire dunque da n valori della $\eta(t)$ campionata e registrata in maniera discreta ($\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_i \dots \eta_n$), con un intervallo di campionamento Δt si ricavano dunque le N onde di un dato stato di mare, ciascuna caratterizzata dalla sua altezza H_i e dalla suo periodo T_i . Altezze e periodi sono variabili casuali che vanno trattate in maniera statistica.

Le altezze delle onde in un certo stato di mare si distribuiscono secondo la distribuzione statistica di Rayleigh:

$p(H)$, che fornisce la densità di probabilità di onde di altezza H in uno stato di mare caratterizzato dal parametro H_{rms} .

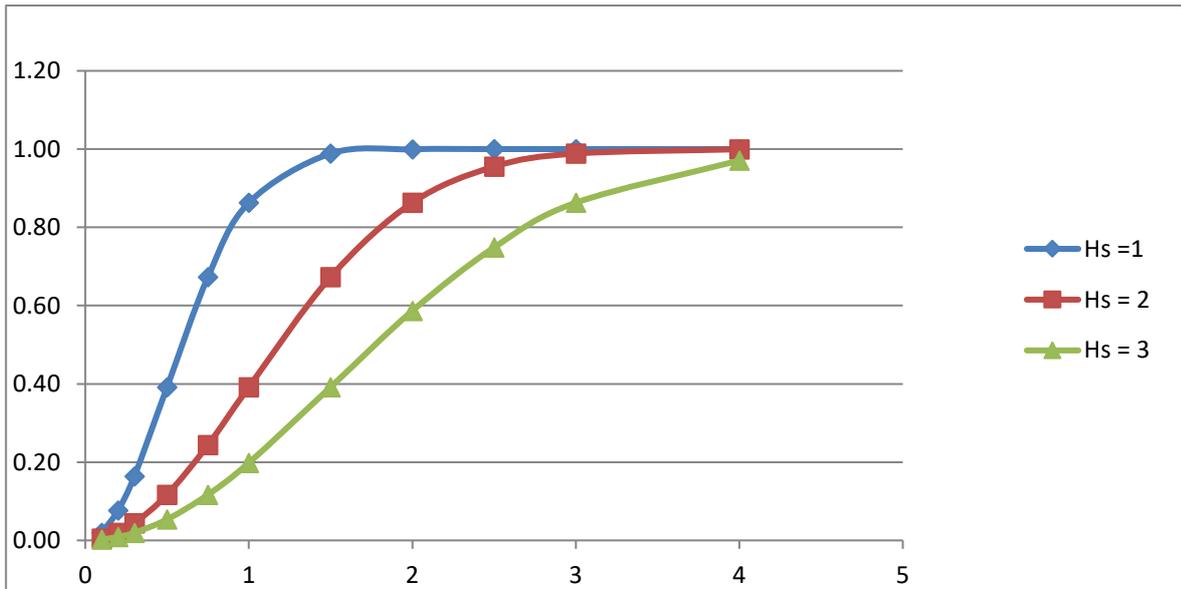
La corrispondente probabilità cumulata $P(H)$ fornisce la probabilità che una data onda sia minore di H .

$$p(H) = \frac{2H}{H_{rms}^2} \exp\left(\frac{-H^2}{H_{rms}^2}\right) \quad 1$$

$$P(H) = 1 - \exp\left(\frac{-H^2}{H_{rms}^2}\right)$$

La figura seguente illustra 3 esempi di cumulata per diversi valori del parametro H_{rms} . La didascalia indica il valore di H_s , che come si vedrà, è legato a H_{rms}

¹ Notare che questa distribuzione ha un unico parametro (H_{rms}), a differenza di altre (ad esempio: la Gaussiana, che ne ha due).



Il parametro H_{rms} è la cosiddetta onda quadratica media, (media quadratica delle altezze d'onda),² che può essere stimata con:

$$H_{rms} = \left(\frac{1}{N} \sum_i H_i^2 \right)^{1/2}$$

Altri parametri in uso sono i seguenti:

H_m (media delle H_i),

e soprattutto:

$H_{1/3} = H_s$ (altezza d'onda significativa, definita come la media del terzo delle altezze delle onde più alte rilevate in un certo intervallo temporale). Questo parametro, benché complesso nella definizione, è il più usato per caratterizzare uno stato di mare

Esiste un legame statistico ben definito tra questi parametri:

$$H_s \equiv H_{1/3} = \sqrt{2} * H_{rms} \cong 1,41 H_{rms}$$

$$H_m = 0.886 * H_{rms}$$

Un altro parametro molto importante è σ_η , (deviazione standard delle altezze istantanee d'acqua)³: σ_η è anch'esso un parametro caratteristico dello stato di mare, ed a esso sono legati, i parametri della distribuzione delle H_i definite sopra: in particolare, e molto importante

$$H_{1/3} = 4 \sigma_\eta$$

Il parametro $4 \sigma_\eta$ viene spesso indicato come H_{m0} , si ha dunque

² NON è lo Scarto Quadratico Medio, che è invece la media quadratica degli scostamenti rispetto alla media (radice quadrata della varianza)

³ NON CONFONDERE QUESTA σ_η con la σ che compare nella formula di Airy come frequenza dell'onda sinusoidale monocromatica, e che in queste pagine si indica con ω

$$H_{1/3} = H_{mo} = 4 \sigma_{\eta}$$

E dunque:

$$H_{rms} = \frac{H_{1/3}}{\sqrt{2}} \cong \frac{4}{\sqrt{2}} \sigma_{\eta} = 2\sqrt{2} \sigma_{\eta}$$

Queste relazioni sono molto utili e permettono di stimare tutti i parametri necessari a partire da σ_{η} che è facilmente calcolabile a partire dai dati sperimentali di $\eta(t)$.

Inoltre a volte si definiscono

$H_{1/10}$ $H_{1/100}$ (altezza "un decimo", un centesimo, definite come il decimo, centesimo quantile delle altezze delle onde più alte rilevate in un certo intervallo temporale), sono usate le per la progettazione di alcune opere).

$$\text{Si ha : } H_{1/10} = 2.03 \cdot H_m = 1,8 H_{rms} = 1,29 \cdot H_{1/3}$$

Anche il periodo delle onde in uno stato di mare è una variabile casuale e può essere caratterizzato in varie maniere. Per ora ci limiteremo a utilizzare T_m , che è semplicemente definito come il periodo medio: T_m

$$T_m = \frac{\sum T_i}{N}$$

E' possibile anche definire un "periodo significativo T_s , che si ottiene in maniera simile all' H_s : la media del terzo dei periodi più alti rilevati in un certo intervallo temporale)

Più avanti considereremo altri possibili modi di valutare il periodo dello stato di mare.

(Attenzione a non confondere i parametri statistici di uno stato di mare (H_m , H_{rms} , T_m etc) con

l'altezza di una singola onda H_i !!!)



Il file [Dati OndametroUN](#) contiene due registrazioni reali (ottenute nel 1986 al largo di Sorrento dall'ondametro dell'Istituto di Oceanografia e Meteorologia dell'Università Parthenope di Napoli) di $\eta(t)$. L'intervallo di campionamento è di 0,5 secondi. Si devono determinare le singole onde col metodo dello zero up-crossing e di ricavare - a partire dal valore misurato di $\eta(t)$ i valori medi dei vari parametri

Da queste si possono verificare le relazioni riportate sopra-

(I risultati potrebbero non confermare esattamente le espressioni empiriche riportate sopra: la serie è troppo breve per costituire un buon campione statistico).

E' importante poter stimare il flusso di energia del moto ondoso di uno stato di mare

Ricordando l'espressione per un treno d'onda sinusoidale (per una striscia di mare di larghezza unitaria, in acqua profonda) si ha :

$$F = E \cdot C_g = E \cdot C \cdot n$$

Ricordando l'espressione di C e di n per l'acqua profonda, si ha

$$F = E \cdot C \cdot n = \frac{g \cdot \rho}{8} \frac{gT}{2\pi} H^2 \cdot 0,5 = \frac{g \cdot \rho}{32} \frac{gT}{\pi} H^2$$

Trattandosi di una successione di onde random, poiché l'altezza d'onda appare al quadrato, è ragionevole utilizzare il valore della media quadratica H_{rms} ,

$$F_{random} = \frac{g \cdot \rho}{32} \frac{gT}{\pi} H_{rms}^2$$

Utilizzando la relazione riportata sopra $H_{rms} = H_{1/3} / \sqrt{2}$:

$$F = \frac{g \cdot \rho}{64} \frac{gT}{\pi} H_{1/3}^2$$

(non a memoria, ma bisogna saperlo ricavare)

Per T si può assumere il valore medio T_m . Il risultato naturalmente è in Watt su metro lineare.

ANALISI SPETTRALE

Un altro modo di caratterizzare uno stato di mare è quello basato sull'analisi spettrale temporale e spaziale dell'altezza d'acqua istantanea.

È possibile formarsi un'idea intuitiva dell'analisi spettrale; tuttavia, per comprendere appieno questo strumento occorrerebbe aver chiari i concetti di trasformata ed antitrasformata di Fourier.

Nel seguito ci limitiamo a fornire degli elementi in maniera puramente intuitiva. Inoltre lavoreremo quasi sempre nel discreto, e ci riferiremo a valori delle funzioni discrete nel tempo o nello spazio, come peraltro avviene nella realtà; dunque, ad esempio, dalla funzione $\eta(t)$, campionata con intervalli di tempo Δt si ottiene una successione $\eta_j = \eta(j \cdot \Delta t)$. Chi abbia studiato la Trasformata di Fourier nel continuo dovrà fare uno sforzo per collegarla all'esposizione che segue.

Ciò premesso, mettiamoci nei panni di un osservatore (un ondometro) che in un punto fisso misuri l'altezza istantanea $\eta(t)$: si dimostra che qualunque $\eta(t)$ è rappresentabile tramite una somma di M termini (co)sinusoidali:

$$\eta(t) = \sum_j^M a_j \cos(\omega_j t - \phi_j)$$

dove M è un numero molto grande⁴ (dipende dal moto ondoso); a_j è l'ampiezza, ω_j la pulsazione^{5 6} e ϕ_j la fase della j-ma "componente" a pulsazione ω_j ; i valori di ϕ_j sono arbitrari e possono essere assegnati liberamente per i nostri scopi; i valori di a_j rappresentano i pesi delle varie componenti di pulsazione ω_j – anche noti come coefficienti della serie di Fourier -.

In realtà, al posto della $\eta(t)$ consideriamo la successione η_j e più correttamente:

$$\eta_j = \sum_j^M a_j \cos(\omega_j j \Delta t - \phi_j)$$

⁴ Dipende da molti parametri, tra cui in particolare l'intervallo di campionamento Δt

⁵ La pulsazione $\omega = 2 \pi / T$ è legata alla frequenza $f = 1/T$ da: $\omega = 2 \pi * f$. Qualche volta anche ω viene chiamata "frequenza".

⁶ Come già evidenziato, ω è anche indicata come σ . Il cambiamento è necessario per evitare confusione

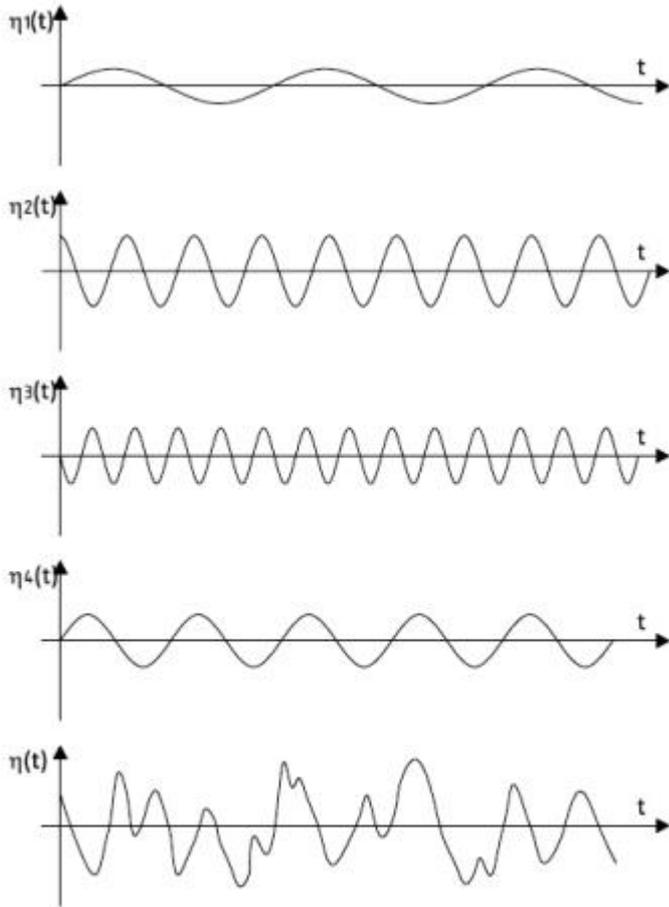


Figura 3.3 Sovrapposizione effetti

Esempio di $\eta(t)$ (figura in basso) ottenuto come sovrapposizione di quattro funzioni armoniche monocromatiche di ampiezza e frequenza diverse, sfasate (Φ_j) tra loro

Le ω_j sono equi-intervallate; partendo dalla frequenza più bassa ω_1 , le successive sono date da $\omega_j = \omega_1 + j \cdot \Delta\omega$. Nell'analisi delle registrazioni ω_1 non può essere più bassa di

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi / D$$

dove D è la durata dell'osservazione; in altre parole, non è possibile estrarre informazioni relative a periodi più lunghi di D – il che è abbastanza intuitivo. Analogamente, se Δt è l'intervallo di campionamento della $\eta(t)$, non ha senso introdurre frequenze più alte di $f_{\max} = 1 / \Delta t$ (quest'ultimo concetto è un po' meno intuitivo ma è importante: f_{\max} si chiama "frequenza di Nyquist")

Impiegare una rappresentazione spettrale vuol dire caratterizzare uno stato di mare con la successione discreta delle a_j sopra definite, date in funzione delle frequenze spettro di ampiezza, o trasformata di Fourier. (Nel continuo si ha invece una funzione $a(\omega)$)

Nella realtà si fa però più spesso ricorso alla funzione che lega ω_j (o f_j) con a_j^2 (spettro di potenza o di varianza); l'utilità di questa rappresentazione si comprende bene se si ricorda che il quadrato dell'ampiezza di un'oscillazione sinusoidale è proporzionale alla sua energia. Nel seguito lo spettro di potenza viene indicato come $S(\omega)$ o $E(\omega)$.⁷

⁷ Al posto di ω , come sempre si può usare la frequenza f con $\omega = 2\pi f$

Si può dimostrare (**teorema di Parseval**) che l'integrale dello spettro di energia di uno stato di mare è eguale alla varianza σ_η^2 della altezza d'acqua istantanea $\eta(t)$:

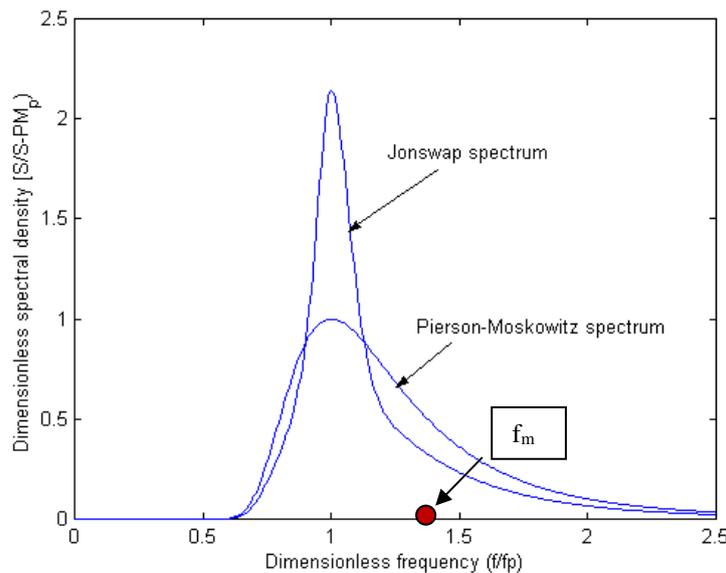
$$\int S(\omega) d\omega = \sigma_\eta^2 = \frac{1}{T} \int \eta^2 dt$$

O, nel discreto, la somma dei quadrati delle a_i è proporzionale a σ_η^2

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_i^n \eta_i^2 = \sigma_\eta^2 \propto \sum_j^M a_j^2.$$

Poiché l'energia di una singola onda regolare è proporzionale al quadrato della sua altezza H_i^2 , è facile comprendere che l'energia di uno stato di mare è proporzionale ad H_{rms}^2 (o ad H_m^2 , o ad $H_{1/3}^2$) e ne segue che σ_η^2 – e quindi l'area dello spettro – è un indicatore dell'energia dello stato di mare

Lo spettro delle onde di mare può essere molto vario. Esistono delle rappresentazioni analitiche e parametriche, tra le quali la più comunemente usata è quella del cosiddetto spettro JONSWAP.



NB la rappresentazione qui riportata è adimensionale- le frequenze sono rapportate alla frequenza di picco f_p

La forma dello spettro di Jonswap ⁸ $S(\omega)$ (NON a memoria) è

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right] \gamma^r \quad r = \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2 \sigma^2 \omega_p^2} \right]$$

(da http://oceanworld.tamu.edu/resources/oeng_textbook/chapter16/chapter16_04.htm)

⁸ NB La funzione $S(\omega)$ è data nel continuo, mentre la descrizione spettrale data prima è nel discreto; immaginando di dividere l'asse ω in (piccoli) intervalli $d\omega$, si ha che l'integrale (l'area) di $S(\omega)$ nell'intervallo ha energia proporzionale a quella di una singola onda sinusoidale di ampiezza a (quindi di altezza $H/2$) $a^2 = S(\omega) * d\omega$

Vedere anche http://www.wikiwaves.org/Ocean-Wave_Spectra

<https://www.orcina.com/SoftwareProducts/OrcaFlex/Documentation/Help/Content/html/Waves,WaveSpectra.htm>

I parametri dello spettro JONSWAP sono 4, di cui due di significato fisico immediato:

α Un moltiplicatore: legato all'energia totale dello spettro, e quindi, come si è visto, all'altezza significativa dello stato di mare ("Parametro di Philips") $\alpha=8.1 \times 10^{-3}$

ω_p che è il valore corrispondente al picco dello spettro ($\omega_p = 2\pi/T_p$; $f_p = \omega_p/2\pi$)

σ un parametro empirico: non c'entra nè con la frequenza nè col ω_p !

γ un parametro empirico che può variare, ma un valore tipico è $\gamma = 3,3$

In base a quanto detto prima, si comprende anche perché il parametro α è legato ad $H_{1/3}$

Questi parametri sono collegati alle seguenti espressioni (non a memoria), legate a grandezze fisiche (F: Fetch; U_{10} : vento a 10 metri di quota) il cui significato sarà chiarito in seguito

$$\alpha = 0.076 \left(\frac{U_{10}^2}{Fg} \right)^{0.22} \quad \omega_p = 22 \left(\frac{g^2}{U_{10}F} \right)^{1/3} \quad \sigma = \begin{cases} 0.07 & \omega \leq \omega_p \\ 0.09 & \omega > \omega_p \end{cases}$$

La prima parte della formula (non a memoria)

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right]$$

(quindi senza il termine γ "peak enhancement factor") è lo spettro di Pierson Moscovitz. Esso è a sua volta formato da due termini, uno dei quali (quello con la ω^{-5}) prevale per valori alti della frequenza e ne descrive la caduta verso lo zero, mentre l'altro, con l'esponenziale prevale nella parte in salita

Esercizio: utilizzando la relazione di Parseval, ricavare l'altezza significativa di uno spettro dato.

Esiste anche un legame tra T_p (periodo di picco dello spettro) e T_m (periodo medio delle onde); ad esempio si può assumere:

$T_m = 0,65 T_p$. Ovviamente $f_p = 0,65 f_m$, $f_m = f_p/0,65$ (vedi puntino rosso sul diagramma): la frequenza media è circa 1,54 volte maggiore della frequenza di picco

Esercizio: verificare questa relazione sui dati di ondometro

Il periodo significativo **T_s** è circa eguale al periodo di picco spettrale **T_p** : esistono relazioni empiriche che legano le due grandezze, ad es., secondo il manuale ASCE: $T_s = 0.95 T_p$ ⁹

Tutto quanto detto finora riguarda la rappresentazione temporale; si assumono cioè onde di Stokes/Airy, e si suppone di fissare la coordinata spaziale x . Gli stessi ragionamenti si possono fare nello spazio x , cioè pensando di fissare il tempo. Si ricordi quello che si è imparato a proposito delle onde di Airy: la η è una funzione sia di t sia di x .

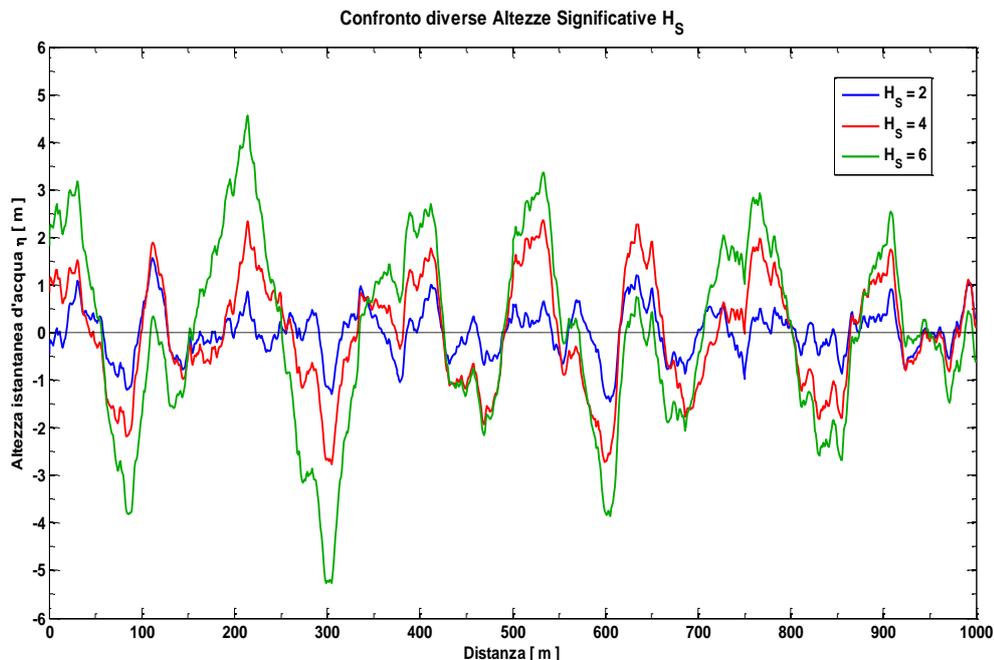
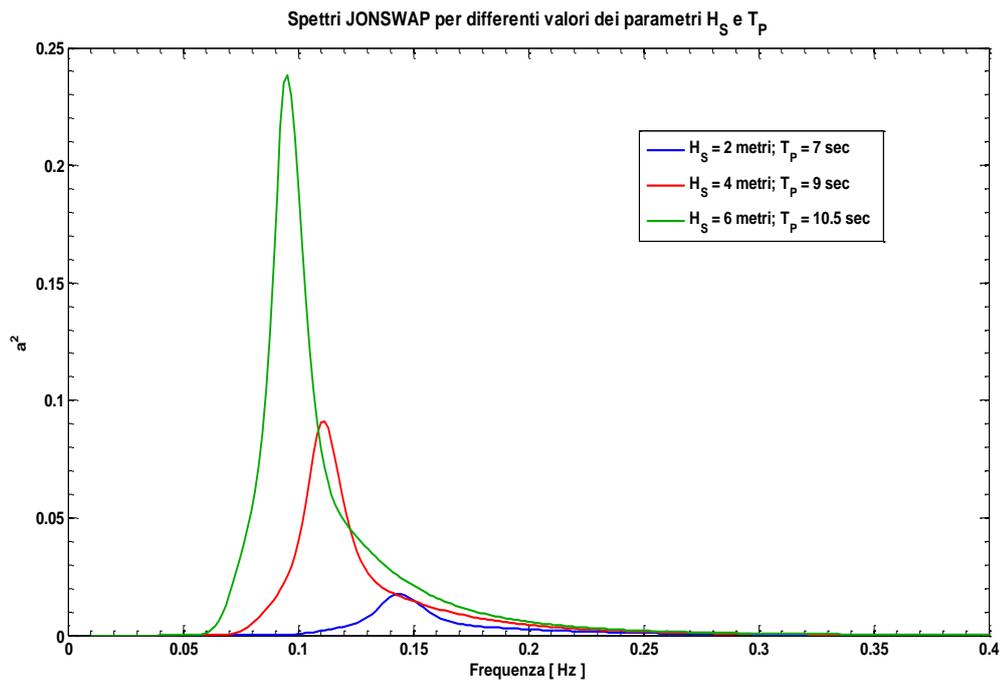
Se immaginiamo che lo stato di mare sia dato dalla somma di molte onde alla Airy (ciò che è vero solo nei limiti discussi all'inizio) possiamo passare dalla rappresentazione temporale a quella spaziale associando ad ogni ω_j il corrispondente k_j (e quindi lunghezze d'onda L_j) attraverso l'equazione della dispersione: si ottengono così spettri spaziali anziché temporali.

Nel seguito sono illustrati 3 esempi di spettri JONSWAP con diversi valori di H_s (quindi, di α) e di f_p , e le rispettive immagini istantanee dello stato di mare

⁹ Inoltre esistono legami empirici anche tra il periodo di picco T_p e altezza significativa H_s di una mareggiata, ad esempio:

$$T_p = 8,5\pi \sqrt{\frac{H_s}{4g}} = 4,25\sqrt{H_s}$$

e quindi anche tra periodo medio T_m e H_s . Queste relazioni empiriche possono essere comode ma vanno trattate con cautela



Il concetto di spettro va ora esteso alle due dimensioni spaziali.

Nella foto all'inizio di questi appunti c'è una vista dall'aereo di un mare mosso: si vedono le creste irregolari e la formazione di schiuma .

Solo raramente, le onde si propagano lungo una direzione ben definita e netta (mare "a cresta lunga", "long crested"). In generale le direzioni sono distribuite in maniera più o meno casuale attorno ad una direzione media; si può parlare quindi di componenti direzionali oltre che spettrali, che vengono rappresentate attraverso uno spettro direzionale $S_d(k, \theta)$

Tale spettro direzionale si può rappresentare con il prodotto di uno spettro JONSWAP con una funzione di spreading ("spalmatura") $D(\theta)$, dove è l'angolo rispetto alla direzione principale

$$S_d(k, \theta) = S(k) * D(\theta)$$

Con

$$D(\theta) = \cos(\theta)^{2n} \cdot \text{FN}$$

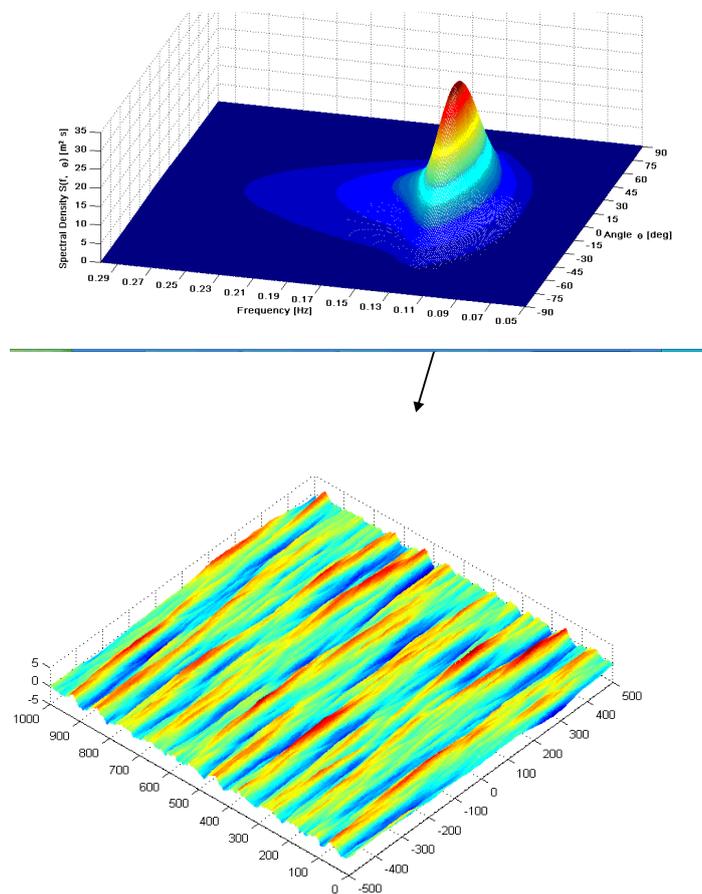
dove FN è un fattore di normalizzazione (l'integrale di D(θ) deve essere eguale ad 1).
Ad esempio, per n=1 ed n=2 si ha rispettivamente:

$$D(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta \quad (|\theta| \leq \frac{\pi}{2})$$

$$D(\theta) = \frac{8}{3\pi} \cos^4 \theta \quad (|\theta| \leq \frac{\pi}{2})$$

Al diminuire del parametro n, la distribuzione angolare si allarga, vale a dire sono presenti componenti con angoli di propagazione diversi rispetto a quella centrale. Per n molto grande, lo spettro tende a tornare monodimensionale (a cresta lunga).

La figura seguente mostra uno spettro bidimensionale e la corrispondente superficie marina

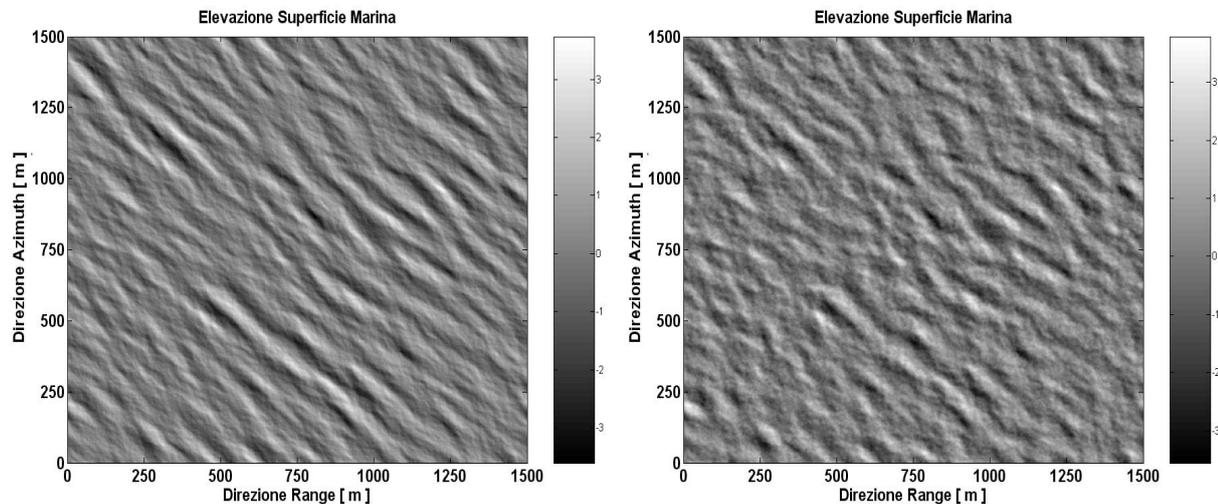


Tale rappresentazione si ottiene dalla seguente (non a memoria)

$$\eta(X, Y, t) = \sum_j^N \sum_i^M A_{i,j} \cos(\omega_i t - k_i (X \cdot \cos \theta_j + Y \cdot \sin \theta_j) + \varepsilon_{i,j})$$

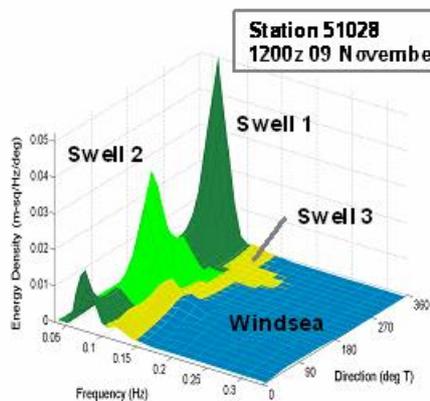
Dove i termini A_i rappresentano il valore delle ampiezze, ω_i e k_i rappresentano le frequenze angolari e i numeri d'onda, legati tra loro come si è detto dalla relazione di dispersione, mentre i termini $\varepsilon_{i,j}$ rappresentano le fasi, variando le quali è possibile ottenere diverse realizzazioni dello stesso stato di mare.

Come si è detto, a parità di tutti gli altri parametri spettrali, la dispersione direzionale diminuisce al crescere del parametro di dispersione n . Al limite per $n = \infty$ si avrebbe un mare perfettamente unidirezionale. Nella figura seguente si vedono due esempi di superficie marina sintetizzate numericamente. Quella di sinistra è stata ottenuta con $n = 75$, quella di destra con $n = 25$.



Si ha così che l'andamento spazio-temporale delle $\eta(x,y,t)$ può essere descritto completamente dallo spettro, sia spaziale sia temporale

Gli spettri possono anche essere molto complessi, specialmente negli oceani. Nel seguito, un esempio con tre sistemi d'onda sovrapposti.



(Da: B. Tracy, E. Devaliere, J. Hanson, . Nicolini "Wind Sea and Swell Delineation for Numerical Wave Modeling")

Qualche esempio di spettri bidimensionali si trova su:
http://www.eugeniopc.it/research/DatiBoa/OndeCUGRIParthenopeMarzoeAprile_11.pdf
 Nello stesso file sono riportati i dati tipici prodotti da un ondometro: H_s , T_s , Direzione principale dello stato di mare campionato ogni 30'.