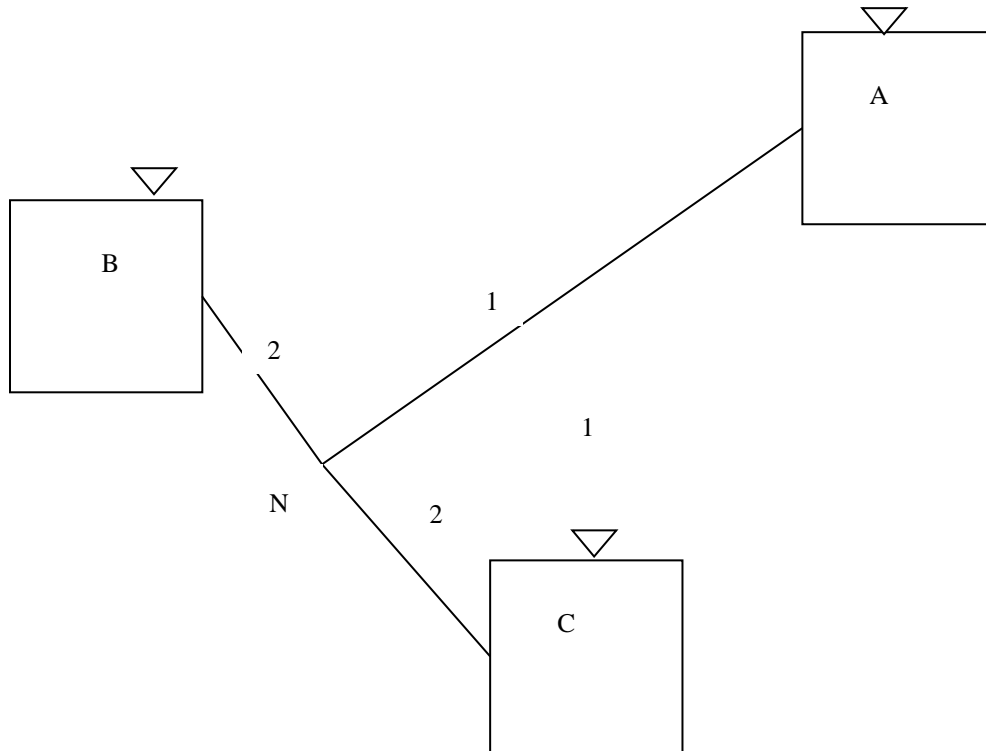


PROBLEMA DEI TRE SERBATOI

Tre serbatoi A, B e C sono collegati tra di loro attraverso un nodo comune N.



Si chiede di calcolare i valori delle 3 portate Q_1 , Q_2 , e Q_3

PARAMETRI	DATI	DIMENSIONE
z_A	40	m
z_B	30	m
z_C	5	m
L_1	100	m
D_1	0.3	m
L_2	50	m
D_2	0.2	m
L_3	200	m
D_3	0.2	m
e / D	0.0002	/

Si scrivono tre equazioni del moto ("Bernoulli generalizzato") per i tre tronchi compresi tra i tre serbatoi ed il nodo N.

$$\begin{cases} z_A - H_N = \frac{\lambda_1 \cdot V_1^2 \cdot L_1}{2 \cdot g \cdot D_1} \\ H_N - z_B = \frac{\lambda_2 \cdot V_2^2 \cdot L_2}{2 \cdot g \cdot D_2} \\ H_N - z_C = \frac{\lambda_3 \cdot V_3^2 \cdot L_3}{2 \cdot g \cdot D_3} \end{cases}$$

Una quarta equazione è la continuità delle portate nel nodo N

$$E = Q_1 - Q_2 - Q_3$$

(Aver scritto le equazioni in questa forma vuol dire ritenere che la portata nel ramo 1 sia diretta *verso* il nodo; quella nei rami 2 e 3 *dal* nodo *verso* i serbatoi rispettivi. L'ipotesi - e la forma delle equazioni può facilmente venire cambiata se.....)

La risoluzione del sistema non è immediata; il libro propone un metodo per sostituzione, che implica passaggi complessi. Nel seguito si propone una soluzione iterativa, facilmente implementabile con una calcolatrice o un foglio EXCEL.

Risoluzione del sistema

Si fissa un valore del carico H_N nel nodo N ad arbitrio; si applica Bernoulli tra A-N , N-B , N-C ed infine si verifica nell'equazione delle portate l'ipotesi iniziale. Si cambia il valore di H_N finchè non sia verificata l'equazione delle portate

Si fissa un valore del carico H_N nel nodo N ad arbitrio

E' fisicamente evidente che H_N ammette come limite superiore il valore z_A e come limite inferiore z_C .

Parto con un valore di tentativo $H_N = 30$ m (la scelta è arbitraria; in questo valore è particolarmente comodo perchè...)

si applica Bernoulli tra A-N , N-B , N-C

$$\left\{ \begin{array}{l} z_A - H_N = \frac{\lambda_1 \cdot V_1^2 \cdot L_1}{2 \cdot g \cdot D_1} \\ H_N - z_B = \frac{\lambda_2 \cdot V_2^2 \cdot L_2}{2 \cdot g \cdot D_2} \\ H_N - z_C = \frac{\lambda_3 \cdot V_3^2 \cdot L_3}{2 \cdot g \cdot D_3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10 = \frac{\lambda_1 \cdot V_1^2 \cdot L_1}{2 \cdot g \cdot D_1} \\ 0 = \frac{\lambda_2 \cdot V_2^2 \cdot L_2}{2 \cdot g \cdot D_2} \\ 25 = \frac{\lambda_3 \cdot V_3^2 \cdot L_3}{2 \cdot g \cdot D_3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_1 = \left(\frac{0.6}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ V_2 = 0 \\ V_3 = \left(\frac{0.5}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Ora bisogna calcolare le velocità; lo si fa utilizzando l'abaco di Moody.

Calcolo di V₁

Bisognerebbe risolvere questo (sotto)problema per iterazioni successive:

iniziamo con un R_e elevato

D1	Re	λ	V	Re	VERIFICA
0.3	3.000E+06	0.014	6.547	1.964E+06	NO
0.3	1.964E+06	0.0145	6.433	1.930E+06	NO
0.3	1.930E+06	0.0144	6.455	1.936E+06	OK

Come si vede, e come succede quasi sempre, bastano poche iterazioni; **nella maggior parte dei casi, non vale la pena di iterare, è sufficiente assumere il valore di lambda corrispondente al moto assolutamente turbolento.**

Calcolo di V₃

Anche per il calcolo di V₃ parto con un R_e elevato

D ₃	Re	λ	V	Re	VERIFICA
0,2	3,000E+06	0,014	5,976	1,195E+06	NO
0,2	1,195E+06	0,0148	5,812	1,162E+06	NO
0,2	1,162E+06	0,0149	5,793	1,159E+06	OK

anche qui, non sarebbe stato necessario iterare, è sufficiente assumere il valore di λ corrispondente al moto assolutamente turbolento.

infine si verifica nell'equazione delle portate l'ipotesi iniziale.

$$E = Q_1 - Q_3 = 0$$

$$E = \frac{\pi \cdot D_1^2 \cdot V_1}{4} - \frac{\pi \cdot D_2^2 \cdot V_2}{4} = 0.27 \frac{m^3}{s}$$

Si vede che l'errore E commesso nel porre H_N= 30 m è positivo quindi nella soluzione occorre partire con un valore del carico in H_N maggiore.

Si cambia il valore di H_N finchè non sia verificata l'equazione delle portate

Rifaccio la procedura con $H_N = 35\text{m}$.

Riapplicando Bernoulli tra le stesse sezioni come fatto sopra ottengo:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_A - H_N = \frac{\lambda_1 \cdot V_1^2 \cdot L_1}{2 \cdot g \cdot D_1} \\ H_N - z_B = \frac{\lambda_2 \cdot V_2^2 \cdot L_2}{2 \cdot g \cdot D_2} \\ H_N - z_C = \frac{\lambda_3 \cdot V_3^2 \cdot L_3}{2 \cdot g \cdot D_3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 = \frac{\lambda_1 \cdot V_1^2 \cdot L_1}{2 \cdot g \cdot D_1} \\ 5 = \frac{\lambda_2 \cdot V_2^2 \cdot L_2}{2 \cdot g \cdot D_2} \\ 30 = \frac{\lambda_3 \cdot V_3^2 \cdot L_3}{2 \cdot g \cdot D_3} \end{array} \right.$$

Ora l'equazione di verifica delle portate è la seguente:

$$E = Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \left(\frac{0.3}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{2}} \\ V_2 = \left(\frac{0.4}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ V_3 = \left(\frac{0.6}{\lambda_3} \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Calcolo di V_1

Calcolo la V per un Re elevato (**le iterazioni sono inutili, sono riportate solo per verifica**)

D_1	Re	λ	V	Re	VERIFICA
0,3	3,000E+06	0,0140	4,629E+00	1,389E+06	NO
0,3	1,389E+06	0,0146	4,533E+00	1,360E+06	NO
0,3	1,360E+06	0,0146	4,533E+00	1,360E+06	OK

Calcolo di V_2

Calcolo la V per un Re elevato (**le iterazioni sono inutili, sono riportate solo per verifica**)

D_2	Re	λ	V	Re	VERIFICA
0,2	3,0000E+06	0,0140	5,35	1,069E+06	NO
0,2	1,0690E+06	0,0148	5,20	1,040E+06	NO
0,2	1,0398E+06	0,0148	5,20	1,040E+06	OK

Calcolo di V_3

Calcolo la V per un Re elevato (**le iterazioni sono inutili, sono riportate solo per verifica**)

D_3	Re	λ	V	Re	VERIFICA
0,2	3,000E+06	0,0140	6,55	1,309E+06	NO
0,2	1,309E+06	0,0146	6,41	1,282E+06	NO
0,2	1,282E+06	0,0147	6,39	1,278E+06	OK

infine si verifica nell'equazione delle portate

$$E = Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0.32 - 0.16 - 0.20 = -0.04 \frac{m^3}{s}$$

Ora ho ottenuto un errore positivo quindi si deve rifare tutto il calcolo con un valore del carico compreso tra 30 e 35 m.

L'errore E dipende dal valore assunto per il carico H_N ; devo quindi trovare valore di H_N ; per il quale l'errore si annulla; a quel punto è quindi definito il sistema di portate.

Si può procedere per tentativi. eventualmente costruendo un diagramma E/H_N

Si possono facilmente immaginare problemi analoghi: ad esempio 4 (o 5, o 6..) serbatoi connessi attraverso il nodo N. Oppure la presenza di una pompa in uno dei tratti (3): sia nota la portata in quel tratto, si chiedono Q_1 , Q_2 e la prevalenza della pompa.

NOTA: Questa pagina di appunti è stata scritta dall'Ing Pasquale Di Nicuolo quando era ancora uno studente dell'Università di Salerno.