

## **PRINCIPI DI BASE**

**„Es gibt nichts praktischeres, als eine gute Theorie.“**

**“Non c'è niente di più pratico di una buona teoria”**



**Attribuito a Immanuel Kant (1724-1804)**

**AA 2021-2022**

### **Avvertenze**

Alcune parti **sono marcate in blu** : vuol dire che non sono comprese nel programma di idraulica/fluidodinamica ambientale. Possono tuttavia essere interessanti, o utili per raccordare i concetti di questo corso con quelli di altri (scienza delle costruzioni, fisica tecnica, principi di ingegneria chimica etc). Uno studente particolarmente interessato dovrebbe poter riuscire a ricavarle

Neanche le parti marcate in **giallo** sono comprese nel programma. Sono curiosità che possono interessare.

*In corsivo gli esercizi ed applicazioni che bisogna svolgere autonomamente*

Molte dimostrazioni e passaggi formali, indicati con **DE** , non sono riportati e dunque NON fanno parte del programma: questo perché esse verranno riprese in altre materie oppure non hanno un grande interesse

Questo blocco di appunti presenta le basi della Meccanica dei Fluidi e ne illustra le vie di sviluppo; in parte riprende ed utilizza i concetti della prima parte del corso e li articola in maniera più formale. L'astrattezza iniziale sarà compensata dai vantaggi che se ne trarranno nel resto del corso.

Il blocco è così articolato:

**Richiami sul concetto di sforzo**

**Richiami di cinematica**

**Equazione della continuità (Locale e globale)**

**Equazione indefinita dell'equilibrio idrodinamico**

**Equazione di Navier Stokes**

**Equazione globale della quantità di moto**

**Le Vie della Meccanica dei Fluidi**

Nelle ultime pagine sono poi riportati un paio di richiami di matematica

**I) Teorema Di Gauss** che è bene rivedere prima iniziare lo studio dei contenuti.

**II) Equazioni di bilancio (Facoltativa)**

**Richiami sul concetto di sforzo (tensione)**

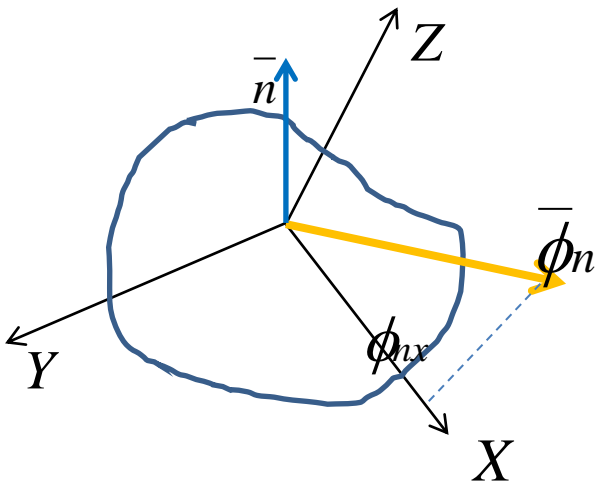
Il concetto di sforzo (sforzo interno, tensione) è comune a tutte le applicazioni della meccanica del continuo: Scienza delle Costruzioni, Geotecnica, etc (si vedano per esempio gli appunti del prof Fraternali: <https://docenti.unisa.it/001258/risorse?categoria=335&risorsa=290>); nel seguito questo concetto viene discusso in maniera sintetica, con la notazione e le convenzioni seguite di solito nella Meccanica dei Fluidi. E' importante comunque collegare questa impostazione con quelle analoghe delle altre discipline.

All'interno di un corpo continuo (liquido, solido, gassoso), in un determinato punto P (x,y,z), si definisce "vettore sforzo" (o tensione) sulla giacitura  $\bar{n}$  il limite  $\bar{\Phi}_n = \frac{\bar{F}n}{S}$ , (in giallo) per S che tende a 0, dove  $\bar{F}n$  è il sistema

di forze che agisce sulla superficie S, nel piano con giacitura  $\bar{n}$  (in azzurro sulla figura). Esso è dunque un vettore, che caratterizza la giacitura del piano che si *considera*.

Ad esempio  $\bar{\Phi}_x$  rappresenta lo sforzo che agisce sulla superficie che si trova sul piano yz, cioè di normale x. Ma non è necessariamente diretto come X!

Notare che l'indice al piede indica la giacitura del piano su cui agisce lo sforzo vettore, in questo caso n.



Come ogni vettore,  $\bar{\Phi}_n$  si può scomporre sulle sue componenti lungo gli assi. Nella figura è visualizzata la  $\bar{\Phi}_{nx}$ : componente scalare lungo x dello sforzo che agisce sulla superficie di normale n. Gli altri componenti si ottengono in maniera analoga. (La scelta della terna x y z è arbitraria).

Esiste un legame tra lo sforzo (vettore)  $\bar{\Phi}_n$ , e la giacitura  $\bar{n}$  stessa; esso è dimostrabile ed è noto come "teorema di Cauchy". I termini matriciali si rappresenta come segue

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{nx} \\ \bar{\Phi}_{ny} \\ \bar{\Phi}_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{xx} & \bar{\Phi}_{xy} & \bar{\Phi}_{xz} \\ \bar{\Phi}_{yx} & \bar{\Phi}_{yy} & \bar{\Phi}_{yz} \\ \bar{\Phi}_{zx} & \bar{\Phi}_{zy} & \bar{\Phi}_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos nx \\ \cos ny \\ \cos nz \end{bmatrix} \quad \text{DE} \quad (1)$$

ovvero

$$\overline{\Phi}_n = \overline{\overline{\Phi}} \overline{n} \quad (1')$$

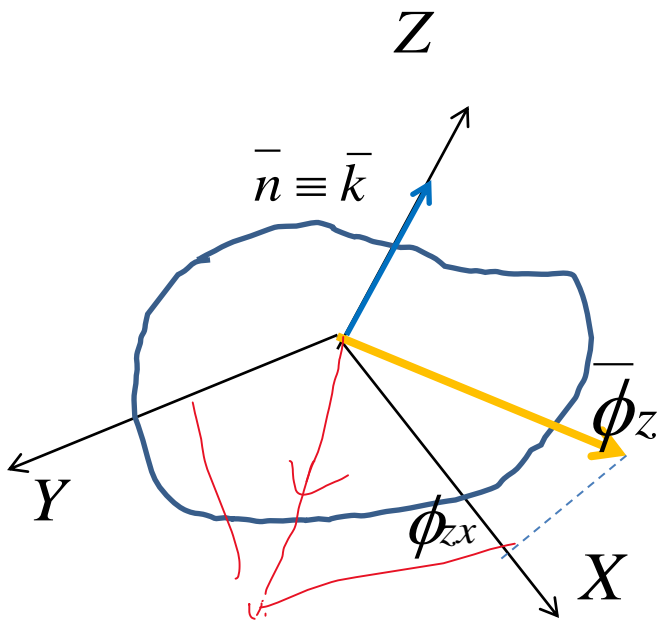
Il legame tra sforzo vettore e giacitura è dunque lineare e si chiama “tensore degli sforzi”,  $\overline{\overline{\Phi}}$ .

Il tensore degli sforzi è simmetrico  $\Phi_{yx} = \Phi_{xy}; \Phi_{yz} = \Phi_{zy}; \Phi_{xz} = \Phi_{zx}$  DE

(Anche questa è una proprietà dimostrabile, e che viene ad esempio dimostrata in Scienza delle Costruzioni)

I termini diagonali (con due indici ripetuti) si chiamano “sforzi normali”, quelli al di fuori della diagonale, “sforzi tangenziali”

Esercitarsi a capire il perché del nome, in base alla definizione: considerare diversi orientamenti



La figura rappresenta il caso in cui la normale  $n$  al piano si trova proprio sull'asse Z.  $\Phi_{zx}$  è quindi lo scalare componente lungo l'asse x dello sforzo che agisce sul piano yx (e quindi di normale z); analogamente ruotando gli indici: si vede quindi che i termini diagonali sono sforzi normali, quelli fuori della diagonale sono tangenziali.

Come sono indicate le  $\Phi_{zz}$  in Scienza delle Costruzioni? E le  $\Phi_{xy}$ ?<sup>1</sup>

Come si vedrà meglio in seguito, gli sforzi, tangenziali e normali, sono dati dal “legame costitutivo”.

In un solido, il legame costitutivo lega gli sforzi con le deformazioni (e cioè col gradiente degli spostamenti: legge di Hooke).

In un fluido invece esso lega gli sforzi con le velocità di deformazione (e cioè col gradiente delle velocità). Esso è dato da relazioni lineari del tipo:

$$\Phi_{xy} = -\mu (\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x) \text{ ed analoghe (Legge di viscosità di Stokes o di Newton,}^{23})$$

<sup>1</sup> Non ha interesse in meccanica dei fluidi la ricerca delle direzioni principali, che è invece importante nella meccanica dei solidi

<sup>2</sup> Sia Newton che Stokes hanno fatto molte cose, da ciò può nascere confusione nei nomi delle varie leggi fisiche

<sup>3</sup>  $\nu = \mu / \rho$  viscosità cinematica. La sua unità nel è  $N \cdot m / s^2$ . Un utile esercizio è quello di ricavarne le dimensioni a partire dalla definizione nella legge della viscosità.

Valori indicativi per  $\nu$  (è bene memorizzarli) sono:  $\nu = 10^{-5}$  (aria)  $\nu = 10^{-6}$  (acqua) Variano molto con la temperatura e (specialmente quello nei gas) con la pressione

$\mu$  è il coefficiente di viscosità dinamica, caratteristico del fluido, (dipende anche da temperatura, pressione etc). Molti fluidi si comportano in maniera più complicata, per cui il legame tra sforzi e velocità di deformazione è NON lineare: si chiamano fluidi non-Newtoniani. Non vengono considerati in questo corso. <sup>4</sup>

Si chiama “ipotesi di fluido perfetto” l’ipotesi che gli sforzi tangenziali siano trascurabili rispetto alle altre forze in gioco. Questo si può indicare in termini matematici – ma concettualmente scorretti - con  $\mu=0$

Inoltre si dimostra, nel caso dei fluidi incompressibili oggetto di questo corso, che: se i termini non diagonali (tangenziali) sono nulli si ha che i termini diagonali sono uguali tra di loro (dimostrazione non importante DE).

Si ha dunque  $\Phi_{yy} = \Phi_{zz} = \Phi_{xx} = p$ , dove  $p$  è la pressione, studiata in idraulica.

In base a quanto detto, in un fluido perfetto, lo sforzo tensore  $\bar{\Phi}$  diventa diagonale e sferico e si può rappresentare come

$$\bar{\Phi} = p\bar{I}$$

dove  $\bar{I}$  è la matrice identica

Lo stesso vale in idrostatica (è ovvio il perché)

Come si trasformano le relazioni 1 e 1', nell' ipotesi di fluido perfetto ?

Come si scrive lo sforzo vettore  $\bar{\Phi}_n$  nell' ipotesi di fluido perfetto ?

Nel caso generale, è utile scomporre lo sforzo totale  $\bar{\Phi}$  in due parti: una data dal solo sforzo normale  $p\bar{I}$  ed un'altra che contiene i termini rimanenti  $\bar{\Phi}_d$  “sforzo deviato”

$$\bar{\Phi} = p\bar{I} + \bar{\Phi}_d$$

Ovvero

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{xx} - p & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} - p & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} - p \end{bmatrix}$$

Questa scomposizione sarà utile nel seguito. Come visto sopra, (sempre nel caso dei fluidi incompressibili) gli sforzi normali sono uguali tra di loro e dunque

$$\Phi_{xx} = \Phi_{yy} = \Phi_{zz} = p$$

La pressione dunque è la componente normale dello sforzo (l'unica che esiste nel caso idrostatico e nel caso di fluido perfetto. Verificare dopo aver studiato nel seguito il “concetto di fluido perfetto” )

Notare che il valore di  $p$  si considera positivo quando la forza è diretta verso il corpo (compressione) ; questa convenzione è opposta a quella della SdC, il che comporta diversità nei segni di alcune espressioni. In un fluido,  $p$  non può essere negativa<sup>5</sup> : il fluido non resiste a trazione

### Moto viscoso in un sistema molto semplice (Viscosimetro)

<sup>4</sup> In realtà, se il fluido è comprimibile, l'espressione è più complessa, e comprende un secondo coefficiente di viscosità. Ma in questo corso, come nella maggior parte delle applicazioni dell'Ingegneria Civile ed Ambientale non è necessario considerarlo.

<sup>5</sup> Naturalmente si parla qui di pressione assoluta

Un albero di diametro  $R$  ruota con velocità angolare  $\omega$  in una cavità di raggio  $R+d$ . C'è quindi una cavità larga  $d$ , che si può considerare (poiché  $d \ll R$ ) rettangolare e di profondità (perpendicolare al foglio) unitaria.

Si crea nel fluido un campo di moto molto semplice: l'unica componente di velocità non nulla è quella tangenziale  $V_s$ , che vale :

$V_s = 0$  sulla superficie esterna

$V_s = V_0 = \omega R$  sulla superficie interna.

(Il diagramma della velocità è quello visto da un osservatore fisso; la velocità relativa fluido-solido è sempre 0)

La derivata della velocità  $\partial V_s / \partial r$  è dunque  $= V_0 / d$

Lo sforzo tangenziale interno esercitato in direzione  $s$  sulla superficie di normale  $r$  vale dunque

$$\Phi_{rs} = \mu (\partial V_s / \partial r) = \mu V_0 / d$$

Qual'è il suo verso?

Se si intende lo sforzo che gli strati interni esercitano su quelli esterni (osservatrice sull'osservatore), il verso è quello della freccia verde.

Se si intende lo sforzo che gli strati esterni esercitano su quelli interni (l'osservatore sull'osservatrice), il verso è quello opposto alla freccia verde.

Lo schema è alla base di un semplice strumento per misurare la viscosità  $\mu$ . Ad esempio, si impone la velocità angolare  $\omega$ , e si misura il momento resistente  $M_r$ .

Qual è la relazione risolutiva che lega  $\mu$  con  $M_r$ ?

Lo schema è alla base di un semplice strumento per misurare la viscosità  $\mu$ . Ad esempio, si impone la velocità angolare  $\omega$ , e si misura il momento resistente  $M_r$ .

Qual è la relazione risolutiva che lega  $\mu$  con  $M_r$ ?



$$M_r = \Phi_{rs} * R^2 * \pi * R = \mu (\partial V_s / \partial r) * 2 * \pi * R^2 = \mu V_0 / d * 2 * \pi * R^2$$

<https://www.youtube.com/watch?v=jc9qlv-jzC4>

### Richiami di cinematica - Punto di vista Euleriano e Lagrangiano

Le basi della cinematica fanno anche da collegamento con i concetti essenziali impiegati nella prima parte del corso.

Dobbiamo qui sottolineare l'importanza della relazione che lega la derivata "totale" con le derivate parziali rispetto la tempo ed allo spazio; la cosa si comprende meglio se invece di un vettore come la velocità della particella si considera prima una qualunque quantità (ad es l'energia termica, una sostanza disciolta la carica elettrica) associata alla massa.

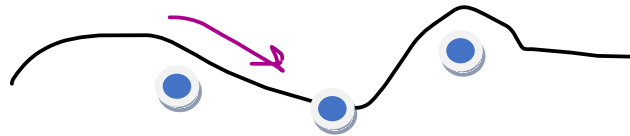
Siano dunque  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  le funzioni che descrivono il variare della la posizione del punto materiale col tempo (in altre parole,  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  sono la traiettoria del punto).

Si ha che

$$V_x = \frac{\partial X}{\partial t} \quad V_y = \frac{\partial Y}{\partial t} \quad V_z = \frac{\partial Z}{\partial t}$$

Sviluppando la derivata totale di B rispetto al tempo, che rappresenta la variazione della grandezza B vista da un osservatore in moto con il punto, applicando le consuete regole di derivazione di funzioni composte. Si ha

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + V_x \frac{\partial B}{\partial X} + V_y \frac{\partial B}{\partial Y} + V_z \frac{\partial B}{\partial Z}$$



O in termini vettoriali

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \vec{V} \text{grad}(B)$$

Stazionaria (permanente): termine locale =0

Dunque la variazione di B vista da un osservatore in moto con la particella (freccia viola, "lagrangiano") è somma della variazione "locale" del campo di B:  $\frac{\partial B}{\partial t}$  come vista dagli osservatori fissi (cerchi blu, "euleriani") + quella

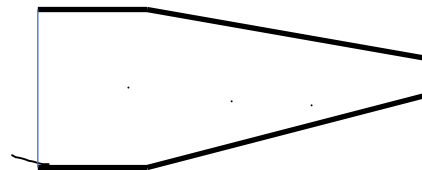
dovuta al fatto che l'osservatore si muove con velocità  $\vec{V}$  in un campo di B che varia nello spazio  $\text{grad}(B)$  (Convettiva).

La stessa cosa si puo' fare per un vettore, ad esempio per la velocità della particella  $\vec{V}$ , come si è visto sopra.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

La relazione per  $\vec{V}$  si puo' anche scrivere come

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \text{grad}(\vec{V})$$



Basta estendere il concetto di gradiente per applicarlo ad un vettore

Dunque l'accelerazione totale, vista da un punto in moto è somma di un'accelerazione locale  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  e di

un'accelerazione convettiva  $V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$

**Esercizio: ripetere questi ragionamenti per un punto di cui sia nota la traiettoria e la legge del moto  $s(t)$ , dove "s" è la coordinata curvilinea lungo la traiettoria stessa. Si arriva alla definizione del trinomio di Bernoulli, studiato nella prima parte del corso**

Quando le derivate locali ("euleriane") sono nulle, il moto si dice uniforme.

Il moto permanente (in cui cioè tutte le derivate locali rispetto al tempo sono nulle, si dice "permanente" o "stazionario". Nel moto "uniforme" invece, le derivate spaziali sono nulle. Queste definizioni sono molto importanti.

E' evidente che in condizioni di moto stazionario

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

puo' esserci un'accelerazione di una particella

### Equazione della continuità in forma differenziale ed in forma globale

L' equazione di continuità rappresenta il concetto che la massa si conserva. In forma differenziale: nelle ipotesi di fluido incomprimibile:

$$\text{div}(\bar{V}) = 0$$

**Se invece  $\rho$  si considera variabile**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{V}) = 0 \quad *$$

La dimostrazione di questa forma, che pure è possibile ed è riportata in molti testi, è però poco intuitiva. Nel seguito si vedrà il legame (Gauss) tra questa espressione differenziale e quella globale, che è di comprensione più immediata.

In tutto questo corso si farà solo riferimento a fluidi incomprimibili;  $\rho$  è quindi sempre costante. <sup>6</sup>

L'equazione di continuità studiata sopra in forma differenziale può essere vista anche in forma globale, cioè applicata ad un volume di controllo. Il teorema di Gauss aiuta a capire la transizione tra le diverse forme. Nel seguito è riportata la dimostrazione, tratta dal testo di Marone

<sup>6</sup> Va tenuto presente che quella di "fluido incomprimibile" è un'approssimazione, poiché in realtà  $\rho$  è sempre dipendente dalla pressione e dalla temperatura. L'approssimazione è accettabile, in moto stazionario, se il "numero di Mach"  $Ma$  è abbastanza piccolo

$$Ma = V/C < 0,3 - 0,4$$

dove  $V$  è la velocità del fluido,  $C$  la celerità del suono nel mezzo.

Questa condizione va sempre verificata quando si ha a che fare con gas per controllare se un problema si può trattare con i metodi studiati in questo corso (che tratta solo fluidi incomprimibili).

Come riferimento, in condizioni standard, si ha che per l'aria  $C = 330$  m/s, per l'acqua  $C = 1200$  m/s

L'equazione di continuità è una forma del principio di conservazione della massa. Nel caso che la densità sia costante e cioè il liquido incomprimibile, ne risulta che il principio di conservazione della massa si traduce nel principio di conservazione del volume che tale massa racchiude. Si prenda in esame un volume generico fisso nello spazio. Sia  $\Sigma$  la superficie di contorno del volume  $\tau$ . Si voglia esprimere il concetto che il volume che entra in un intervallo di tempo  $dt$  nel volume deve essere uguale a quello che nello stesso intervallo di tempo  $dt$  esce dal volume  $\tau$ , visto che la massa  $\rho\tau$  all'interno di questo è incomprimibile. Essendo al solito la normale  $\mathbf{n}$  alla superficie  $d\sigma$  positiva se orientata verso l'interno del volume  $\tau$ , dovrà risultare:

$$\int_{\Sigma} V_n d\sigma = 0 ,$$

così le portate entranti sono positive e quelle uscenti negative.

Con il teorema di Gauss 
$$\int_{\Sigma} V_n d\sigma = \int_{\tau} \text{div} \vec{V} d\sigma$$

Valido per qualunque volume di controllo. Quindi:

$$\text{div}(\vec{V}) = 0$$

che è la forma riportata sopra.

*Per esercizio:*

*Ricordare la formulazione dell'equazione di continuità in forma monodimensionale, dalla prima parte del corso.*

### **Equazione indefinita dell'equilibrio idrodinamico**

Dai principi fondamentali di Newton, si ricava la cosiddetta equazione indefinita dell'Idrodinamica. (anche: eq. "locale"). Essa costituisce l'estensione del primo principio della dinamica ai mezzi continui ed è dunque comune a tutta la meccanica del continuo. E' necessario conoscere la sua formulazione, sia in termini sia in termini vettoriali, sia tensoriali, sia scalari.

Si parte da:

$$\overline{F} = m d\overline{V} / dt \tag{1}$$

L'equazione è applicata ad un punto materiale, ed in un fluido quindi essa è riferita alla singola particella che si muove (che è il punto di vista c.d Larangiano).

Essa va particolarizzata per includere nel termine relativo alla forza  $\overline{F}$  tutti i termini che rappresentano le forze agenti in un fluido: sia le forze di volume, sia quelle superficiali (sforzi o tensioni)

Si suppone qui che esista un campo di forze di massa<sup>7</sup> :  $\overline{f}(x,y,z,t) = \overline{g}(x,y,z,t)$ , che in tutti i casi trattati in questo corso è la forza di gravità, supposta costante nello spazio e nel tempo.

<sup>7</sup> Esistono altre importanti forze "di massa" o "di volume": ad es, la forza elettrica e magnetica; le forze apparenti.



Sostituendo, e svolgendo opportuni ragionamenti e passaggi, si dimostra che

$$\rho d\bar{V} / dt = \rho \bar{f} - \text{div} \bar{\Phi} \quad \text{DE} \quad (2)$$

Equazione indefinita dell'equilibrio idrodinamico

Notiamo che nella 2 le forze superficiali compaiono attraverso la loro divergenza (termine a destra)

La divergenza è data da<sup>8</sup>:

$$\text{div} \bar{\Phi} = \nabla \cdot \bar{\Phi} = \bar{\Phi} \nabla$$

In notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \partial\phi_{xx}/\partial x & +\partial\phi_{xy}/\partial y & +\partial\phi_{xz}/\partial z \\ \partial\phi_{yx}/\partial x & +\partial\phi_{yy}/\partial y & +\partial\phi_{yz}/\partial z \\ \partial\phi_{zx}/\partial x & +\partial\phi_{zy}/\partial y & +\partial\phi_{zz}/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix}$$

L' equazione 2 va memorizzata e compresa a fondo; la sua dimostrazione, riportata ad esempio nel paragrafo 1.3 pag 40 e ss del testo di Marone non è parte del programma d'esame. Essa potrebbe essere utile per comprendere bene il significato dei termini che compaiono nella relazione ed è inoltre un esempio molto importante del procedimento impiegato in tutti i settori dell'ingegneria per dedurre relazioni differenziali (= "Locali", "indefinite"). E' anche illustrata nelle dispense di Fraternali, limitatamente al caso statico , cioè di velocità ed accelerazioni nulle)

Utili esercizi:

- Ricavare la forma scalare (2')

- Ricavare la forma vettoriale:

$$\rho d\bar{V} / dt = \rho \bar{f} - \frac{\partial \bar{\Phi}_X}{\partial X} + \frac{\partial \bar{\Phi}_Y}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{\Phi}_Z}{\partial Z} \quad (2'')$$

Va ancora ricordato che il termine  $d\bar{V} / dt$  può essere ulteriormente scomposto nelle sue parti "locale" e "convettiva". Ciò servirà per trasformare il punto di vista da "Lagrangiano" a "Euleriano" , cioè relativo ad un riferimento che NON è legato al corpo. In Meccanica dei Fluidi si segue spesso (ma non sempre) il punto di vista Euleriano

Si ricavino per esercizio le forme dell' equazione indefinita 2, 2', 2'', nelle ipotesi di fluido perfetto

Come diventa in termini vettoriali il termine  $\text{div} ( p \bar{I} )$  ?

<sup>8</sup> Semplice estensione del concetto di divergenza di un vettore

## Equazione di Navier Stokes

Dall' equazione indefinita dell' equilibrio idrodinamico si passa all'equazione di Navier Stokes introducendo il legame sforzi/gradiente di velocità ("legame costitutivo")– la cui espressione semplificata, come visto sopra, in forma scalare è data da:

$$\Phi_{xy} = - \mu (\partial V_x / \partial y + \partial V_y / \partial x) \quad \text{ed analoghe (Fluido newtoniano)}$$

( $\mu$  viscosità dinamica ;  $\nu = \mu / \rho$  viscosità cinematica)

Il legame costitutivo viene introdotto nella parte deviata del tensore degli sforzi presente nell' equazione indefinita dell' equilibrio. Si ottiene così il seguente risultato, in termini scalari:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right] + \rho f_x \quad \text{DE} \quad \text{NS (x)} \quad 3$$

(1)            (2a)            (2b)            (3)

E analoghe lungo gli assi y e z.

### Riscrivere le 3 equazioni scalari come unica relazione vettoriale

L'operatore "somma delle derivate seconde spaziali si chiama "nabla quadro ":

$$\nabla^2 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]$$

La derivazione dell'equazione di NS è macchinosa e non fa parte del programma. Occorre però aver ben chiaro come ciascuno dei termini dell'eq indefinita dell' equilibrio si trasforma nel corrispondente termine dell'equazione di Navier Stokes .

*Sviluppare il termine  $dV_x / dt$  della NS a sinistra (1) nelle sue parti convettiva e locale (da farsi dopo aver studiato i paragrafi seguenti)*

*Come diventa il termine 2b per un fluido perfetto?*

### L'equazione globale della quantità di moto

Le equazioni della meccanica dei fluidi possono essere formulate in maniera "locale" ("differenziale", "indefinita"), come si è fatto sopra, ottenendo appunto l'equazione dell' equilibrio idrodinamico e quella della continuità.

E' però spesso indispensabile esprimere le relazioni fisiche in forma globale con riferimento ad un volume che si definisce "volume di controllo"  $V_c$ <sup>10</sup> di cui S è la superficie di frontiera ("contorno"). Il volume di controllo puo' essere fisso, oppure muoversi, ma NON è legato al fluido; esso rappresenta dunque tipicamente un punto di vista euleriano. Il fluido entra o esce portando con sé la quantità di moto. Agiscono inoltre le forze superficiali (integrali degli sforzi) sul contorno S e le forze di massa o di volume su  $V_c$ .

Si passa così dalla forma differenziale (equazione indefinita dell' equilibrio idrodinamico) a quella integrale (equazione globale dell'idrodinamica). I passaggi per la dimostrazione sono gravosi e non è necessario svilupparli. Si ha:

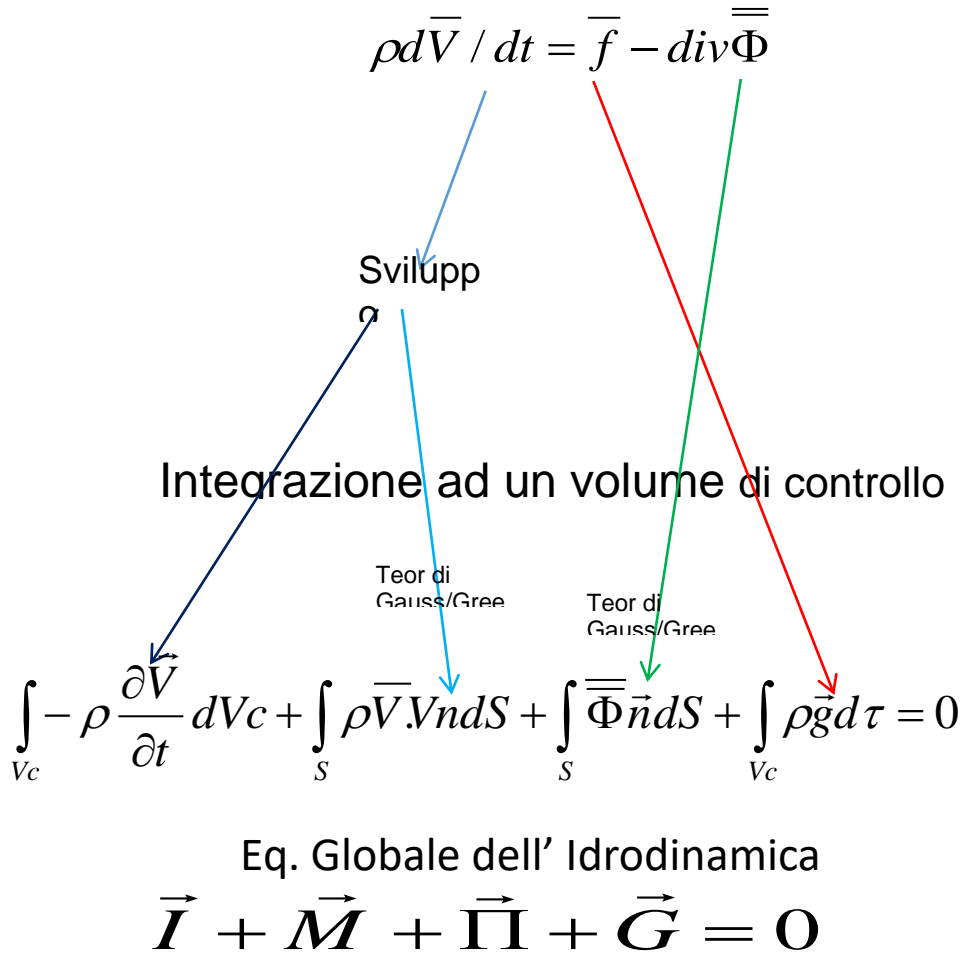
<sup>9</sup> Nella teoria dell'elasticità in SdC si usa un legame (legge di Hooke) che collega il gradiente dello spostamento con gli sforzi. Sempre nella SdC viene illustrata la scomposizione del gradiente dello spostamento in varie parti e la stessa cosa si fa in Meccanica dei Fluidi, però con il gradiente della velocità, poiché nel legame costitutivo compaiono le derivate spaziali della velocità e non quelle dello spostamento.

<sup>10</sup> Attenzione a non confondere il simbolo V, velocità con Vc, volume di controllo. Talvolta il volume è indicato con  $\tau$ .

$$\int_{V_c} -\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dV_c + \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{V}_n dS + \int_S \vec{\Phi} \vec{n} dS + \int_{V_c} \rho \vec{g} dV_c = 0$$

$$\vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi} + \vec{G} = \mathbf{0} \quad \text{DE}$$

. La figura seguente li illustra in maniera schematica



E' però **necessario** comprendere:

- La divisione del termine di accelerazione totale (in blu nel disegno) nella parte locale e convettiva
- la trasformazione del termine degli sforzi  $\text{div} \vec{\Phi}$  (integrato al volume) in  $\vec{\Phi} \vec{n}$  (integrato sulla superficie di frontiera). Lo strumento matematico che permette questa trasformazione (in verde) è il teorema di Gauss.

Spesso (sempre, nelle applicazioni di questo corso) il termine  $\vec{\Pi}$  viene diviso in due parti: uno relativo alle sole pressioni, ed uno relativo agli sforzi tangenziali.

Il primo – che è l'unico presente nei fluidi perfetti - diventa<sup>11</sup>:

$$\int_S \bar{p} \bar{n} \cdot dS$$

(Dimostrazione per esercizio, ricordando la forma matriciale dello sforzo)

Il secondo deriva dal legame costitutivo (legge di Stokes) che lega il gradiente della velocità con gli sforzi tangenziali, e risulta essere.

$$\int_S \mu \cdot \partial \bar{V} / \partial n \cdot dS$$

La dimostrazione è complessa, ed anche l'applicazione. La sua utilità però è limitata a casi in cui esiste una componente della velocità tangente alla frontiera del dominio, e quindi la forma diventa assai più semplice e si riduce alla formulazione scalare del legame costitutivo:

$$\Phi_{xy} = \mu (\partial V_x / \partial y + \partial V_y / \partial x) \text{ ed analoghe (Fluido newtoniano)}$$

Infine, i termini relativi al flusso di quantità di moto, del tipo

$$\vec{M} = \int_S \rho \bar{V} V_n dS$$

richiedono lo sviluppo dell' integrale del vettore. Tuttavia, nell'ipotesi, frequentemente verificata, che le sezioni attraverso cui avviene l'ingresso o l'uscita del fluido siano perpendicolari ai vettori velocità, si ha.

$$\vec{M} = \int_S \rho V^2 \vec{n} dS$$

Dove  $\vec{n}$  è il versore della superficie (nelle nostre convenzioni orientato verso l'interno di Vc).

Spesso si assume ancora che

$$\vec{M} = \int_S \rho V^2 \vec{n} dS = \rho V_m^2 S \beta \vec{n}$$

e cioè che l'integrale di  $V^2$  sia esprimibile col prodotto della velocità media  $V_m$  per la superficie  $S$ , per un fattore  $\beta$ , chiamato "coefficiente di ragguglio" o "coefficiente di Coriolis".<sup>12</sup>  $\beta$  è eguale ad 1 solo se il profilo di velocità è costante, ma viene spesso egualmente assunto come unitario per comodità.

Ricavare la formula che definisce  $\beta$

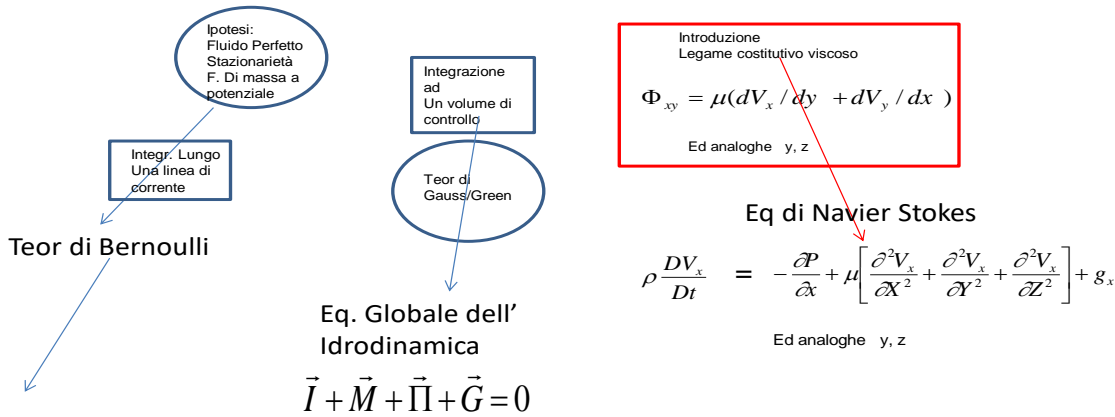
<sup>11</sup> Un'importante avvertenza riguarda i segni dei vari termini: essi dipendono dalle convenzioni sono possibili diverse forme, a seconda che si assuma positivo il verso della normale entrante od uscente positivi oppure negativi gli sforzi di trazione. Un modo possibile per non disorientarsi è quello di mettere tutti i termini a sinistra, adottare la convenzione desiderata per le normali e lasciarsi guidare dal significato fisico per la scelta dei segni. In questi appunti le normali sono considerate positive entranti, come spesso in Meccanica dei Fluidi (nella meccanica dei solidi si usa spesso la convenzione opposta).

<sup>12</sup> Il concetto è simile, ma la definizione diversa, rispetto a quello dell'altro coefficiente di Coriolis  $\alpha$  che compare nel teorema di Bernoulli

**LE VIE DELLA MECCANICA DEI FLUIDI**

Nella figura seguente è esposto lo schema logico dei principali strumenti della meccanica dei fluidi: muovendo dall'equazione indefinita dell'equilibrio idrodinamico (= quantità di moto), si possono seguire diverse strade:

$$\rho d\bar{V} / dt = \bar{\rho}f - div\bar{\Phi}$$



Prima parte del corso "Idraulica Ambientale"

Seconda parte del corso "Fluidodinamica Ambientale"

I percorsi a sinistra ed al centro (in blu) sono quelli tradizionali dell'Idraulica, essenziali per molti problemi pratici, e sono quelli seguiti in questo corso. Il percorso a destra, indicato in rosso, prevede la formulazione differenziale completa (quindi, con l'aggiunta del legame costitutivo=NS). Questa via è divenuta di pratica utilità solo negli ultimi quarant'anni con lo sviluppo della Meccanica dei Fluidi Numerica (CFD, Computational Fluid Mechanics), e richiede uno studio apposito ed approfondito: la sua formulazione essenziale (equazione di Navier Stokes) deve essere però compresa fin da adesso, per meglio inquadrare molti problemi.

Si ricorda che accanto all'equazione delle quantità di moto va sempre considerata anche l'equazione della continuità, anch'essa esprimibile in forma differenziale o in forma integrale. Essa è però molto più semplice da trattare.

### I) IL TEOREMA DI GAUSS ("LEMMA DI GREEN")

Le applicazioni del Teorema di Gauss (o lemma di Green) sono assai frequenti in Meccanica dei Fluidi ed nelle discipline collegate; gran parte dei testi vi fanno continuo e frequente riferimento.

Nel seguito tale teorema - solitamente dimostrato in forma scalare nei testi di Analisi elementare - è espresso in termini vettoriali, senza pretesa di completezza o di rigore formale ed al solo scopo di inquadrare in un'unica formulazione le numerose applicazioni alla MdF.

Sia  $V_C$  un volume di controllo,  $S$  la sua superficie di frontiera,  $\bar{n}$  la normale positiva entrante,  $\bar{T}$  un tensore del secondo ordine; si ha

$$\int_S \bar{T} \cdot \bar{n} dS = - \int_{V_C} \text{div} \bar{T} \cdot dV \quad (*)$$

("L'integrale della divergenza di un tensore è eguale al flusso del tensore sulla frontiera")

La (\*) può facilmente essere applicata ad un vettore anziché ad un tensore del secondo ordine (si pensi al caso del flusso  $q$  di massa o di energia):

$$\int_S \bar{T} \cdot \bar{n} dS = - \int_{V_C} \text{div} \bar{T} \cdot dV$$

Una applicazione importante di questa relazione si trova in tutti i casi in cui si passa dalla formulazione locale a quella globale delle equazioni cosiddette di bilancio, e cioè quelle della massa (continuità) e della quantità di moto (Equazione globale dell'idrodinamica). In quest'ultima  $\bar{T}$  (o  $\bar{\Phi}$ ) è il tensore degli sforzi

L'esempio più semplice è quello della continuità. Si applichi, come esercizio, il teorema di Gauss all'equazione della continuità stabilendo il collegamento tra la forma globale e quella differenziale.

L'applicazione all'equazione della quantità di moto ("equazione dell'equilibrio idrodinamico") è più complessa, ma analoga.

#### Esempio

Limitandosi ad un caso particolare, si faccia riferimento alle ipotesi di "fluido perfetto"

In tali ipotesi, ed a maggior ragione in quelle dell'idrostatica (sforzi tangenziali nulli, sforzi normali eguali fra di loro), il tensore  $T$  è diagonale e sferico e si ha dunque

$$\bar{\Phi} = p \bar{I}$$

dove  $p$  è la pressione ed  $\bar{I}$  è la matrice identica, si ha anche

$$\text{div} (p \bar{I}) = \text{grad} (p) \quad (**)$$

nonché

$$\bar{T} \cdot \bar{n} = p \bar{n} \quad (***)$$

come si verifica facilmente sulle componenti.

Tramite la (\*\*\*) e la (\*\*), la (\*) diventa

$$\int_{V_c} \operatorname{div}(p\bar{\bar{I}})dV = -\int_S p\bar{n}.dS \quad (****)$$

ovvero

$$\int_{V_c} \operatorname{grad}(p\bar{\bar{I}})dV = -\int_S p\bar{n}.dS \quad (*)$$

che è la forma che alcuni testi impiegano, dopo averla derivata direttamente dalla forma scalare del teorema di Gauss, per presentare l' equazione globale dell'idrostatica.

**II) Le equazioni di bilancio**

Questo paragrafo (che non è parte del programma di esame) interrompe la successione logica dei concetti di meccanica del continuo. Esso non fa parte del programma di esame; tuttavia, una volta acquisito, serve a comprendere meglio i termini della c.d. "equazione globale", illustrata sopra, ed anche il "Teorema di Bernoulli" studiato nella prima parte del corso.

Parte dei contenuti che seguono sono comuni al corso di Principi di Ingegneria Chimica; esso aiuta quindi a riconoscere gli stessi concetti espressi in maniera lievemente diverse nelle due discipline

Si chiamano "conservative" quelle funzioni di campo  $b(x, y, z, t)$  per cui si può scrivere una "equazione di bilancio", e cioè una equazione, relativa ad un volume di controllo, che abbia la forma

$$\text{"Variazione"} = \text{"flusso attraverso la frontiera"} + \text{"Produzione"}$$

Le equazioni di bilancio sono conseguenza diretta dei principi fondamentali della fisica applicati ai corpi continui: i casi considerati in questo corso sono unicamente quelli del bilancio di massa (equazione di continuità) e quello della quantità di moto (equazione dell'idrodinamica)

Attraverso questi esempi ci si rende conto che la grandezza  $b(x, y, z, t)$  di cui si fa il bilancio può essere sia un vettore, sia uno scalare; le grandezze conservative sono solitamente (ma non sempre) associate alla massa, tanto che spesso è conveniente assumere :

$$b(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t) \cdot c(x, y, z, t)$$

dove  $\rho(x, y, z, t)$  è la densità e  $c(x, y, z, t)$  è la grandezza specifica relativa alla massa; per fissare le idee, si pensi alla quantità di moto,  $\rho(x, y, z, t) \cdot \vec{V}(x, y, z, t)$  : in questo caso  $c(x, y, z, t)$  è proprio la velocità.

Ancora, nel caso del bilancio dell'energia termica  $e(x, y, z, t)$ , è talora opportuno evidenziare che:

$$e(x, y, z, t) = r(x, y, z, t) \cdot C_s \cdot T(x, y, z, t)$$

dove  $C_s$  è il calore specifico del mezzo e  $T(x, y, z, t)$  è ovviamente la temperatura.

La forma generale di un'equazione di bilancio in forma globale, e riferita ad un volume di controllo  $V_c$  di cui  $S$  è la superficie di frontiera ("contorno), si scrive

$$(1a) \qquad (1b) \qquad (2) \qquad (3)$$

$$\int_{V_c} - \frac{\partial b}{\partial t} d\tau + \int_S b \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int_S \vec{\Phi}_b dS + \int_{V_c} P_b d\tau = 0$$

Se  $b(x, y, z, t)$  è un vettore (il solo caso importante è la quantità di moto:  $\rho(x, y, z, t) \vec{V}(x, y, z, t)$ ), la relazione di bilancio qui sopra sostanzialmente non cambia; l'unica avvertenza è che nel termine (1b) il prodotto  $b \vec{V}$  diventa un prodotto tensoriale  $b \vec{V} \cdot \vec{V}$  e quindi si ha:

E quindi

$$\int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_S \rho \vec{V} V_n dS$$



mentre, naturalmente, tutti gli altri termini salgono di un ordine (i vettori diventano tensori, gli scalari, tensori)

Il termine (1a) è la variazione temporale della grandezza; in altre parole il suo accrescimento o la sua diminuzione (ad es, per la quantità di moto, l'accelerazione locale, indicata nel seguito e nel libro come  $\vec{I}$  ; riscaldamento o raffreddamento se b è l'energia termica).

(1b) "Flusso convettivo" è il trasporto della grandezza b con il fluido, attraverso le pareti; quando infatti esiste un flusso di fluido, evidentemente a questo si accompagna un trasporto della grandezza b che è associata al fluido (ad es. Flusso di quantità di moto  $\overline{\rho V}$  indicato nel seguito come  $\vec{M}$  : se entra fluido in un volume di controllo entra evidentemente anche la quantità di moto o il flusso termico, cioè l'energia termica ad esso associata).

(3) è la produzione (intesa anche in senso algebrico, quindi anche distruzione) di b; nel caso della quantità di moto essa è semplicemente l'azione delle forze di massa, in particolare del peso  $\rho \vec{g}$ , indicata nel seguito come  $\vec{G}$ . Considerando ancora l'esempio dell'energia termica, la produzione può essere causata da una reazione chimica esotermica, la distruzione da una reazione endotermica)

Il termine (2) "Flusso diffusivo" è stato lasciato per ultimo perché una sua possibile definizione è quella "per esclusione": esso è il flusso di b che NON è associato al flusso di massa. In termini di quantità di moto essa è l'integrale dell'azione degli sforzi superficiali  $\vec{\phi} \cdot \vec{n} = \vec{\phi}_n \cdot \vec{n}$  indicata nel seguito come  $\vec{\Pi}$ . Esso ha alla sua origine i fenomeni che avvengono su base molecolare e cioè non i movimenti "visibili" di massa (che sono descritti dal termine (1b) ) bensì effetti derivanti da azioni microscopiche (interazioni tra molecole).

Il flusso di calore per conduzione ne è un esempio evidente e tipico; ma altrettanto evidente è il fatto che - nell'equazione globale dell'idrodinamica - le forze che agiscono alla superficie del volume di controllo costituiscono un flusso di quantità di moto (cioè una forza) non associato al movimento di massa bensì alla pressione o alla viscosità (entrambi effetti a carattere molecolare, come si comprende considerando la teoria cinetica dei gas) <sup>13</sup>

Si è già detto dei segni dei vari termini: sono possibili diverse forme, a seconda che si assuma positivo il verso della normale entrante od uscente positivi oppure negativi gli sforzi di trazione.

Tutte le equazioni di bilancio possono essere espresse in forma globale - che è quella che abbiamo esaminato ora - oppure in forma differenziale (anche: "indefinita"). Si passa dall'una all'altra forma impiegando il teorema di Gauss, ed alcuni passaggi intermedi che - in particolare per il caso dei fluidi compressibili - possono essere abbastanza complessi.

---

<sup>13</sup> L'introduzione degli sforzi di Reynolds in regime turbolento (che verrà trattata in seguito) consiste nello spostare il trasporto di q.d.m associato alle fluttuazioni turbolente da  $\vec{M}$  a  $\vec{\Pi}$  ed a considerarle appunto come sforzi. Analogamente per i flussi turbolenti di energia termica, sostanza disciolta, etc