PRINCIPI DI BASE

„Es gibt nichts praktischeres, als eine gute Theorie.“

“Non c’è niente di più pratico di una buona teoria”

Attribuito a Immanuel Kant (1724-1804)

AA 2018-2019

Avvertenze

Alcune parti sono marcate in blu : vuol dire che non sono comprese nel programma di idraulica/fluidodinamica ambientale. Possono tuttavia essere interessanti, o utili per raccordare i concetti di questo corso con quelli di altri (scienza delle costruzioni, fisica tecnica, principi di ingegneria chimica etc.)

In corsivo gli esercizi ed applicazioni che bisogna svolgere autonomamente

Lo studio di questi appunti presuppone la conoscenza di alcuni argomenti esposti nella prima parte del corso:

Concetto di sforzo; Equazione indefinita dell’equilibrio idrodinamico, Equazione della continuità (Locale e globale), Equazione di Navier Stokes, Equazione globale della quantità di moto

Nel seguito sono presentati i seguenti argomenti:

Elementi di cinematica del continuo; il principio di Bernoulli, sulle linee di corrente e nei tubi di flusso; le perdite di carico nelle tubazioni.

Nelle ultime pagine sono poi riportati alcune brevi discussioni (facoltative, ma che possono essere di aiuto a comprendere o ad approfondire)

I) Teorema Di Gauss

II) Equazioni di bilancio (Facoltativa)

III) Le Vie della Meccanica dei Fluidi

Inoltre, un utile esercizio:

IV) Il viscosimetro

In tutto questo corso si farà solo riferimento a fluidi incomprimibili; ρ è quindi sempre costante. Va però tenuto presente che quella di “fluido incomprimibile” è un’approssimazione, poiché in realtà ρ è sempre dipendente dalla pressione e dalla temperatura. L’approssimazione è accettabile, in moto stazionario, se il “numero di Mach” Ma è abbastanza piccolo

$$Ma = V/C \quad < 0,3 – 0,4$$

dove V è la velocità del fluido , C la celerità del suono nel mezzo.

Questa condizione va sempre verificata quando si ha a che fare con gas per controllare se un problema si può trattare con i metodi studiati in questo corso (che tratta solo fluidi incomprimibili).
Come riferimento, in condizioni standard, si ha che per l'aria C = 330 m/s, per l'acqua C = 1200 m/s

Richiami di cinematica ed equazione indefinita della continuità lungo una corrente

Derivazione Lagrangiana

Le basi della cinematica fanno anche da collegamento con i concetti essenziali impiegati nella prima parte del corso.
E' importante qui sottolineare l'importanza della relazione che lega la derivata "totale" con le derivate parziali rispetto la tempo ed allo spazio; la cosa si comprende meglio se invece di un vettore come la velocità della particella si considera prima una qualunque quantità scalare B(x,y,z,t) (ad es l'energia termica, una sostanza disciolta la carica elettrica) associata alla massa.
Siano dunque X(t), Y(t), Z(t) le funzioni che descrivono il variare della la posizione del punto materiale col tempo (in altre parole, X(t), Y(t), Z(t) sono la traiettoria del punto).
Si ha che

$$V_x = \frac{\partial X}{\partial t} \qquad Vy = \frac{\partial Y}{\partial t} \qquad Vz = \frac{\partial Z}{\partial t}$$

Sviluppando la derivata totale di B rispetto al tempo che rappresenta la variazione della grandezza B vista da un osservatore in moto con il punto, applicando le consuete regole di derivazione di funzioni composte, si ha

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + V_x \frac{\partial B}{\partial X} + V_y \frac{\partial B}{\partial Y} + V_z \frac{\partial B}{\partial Z}$$

O in termini vettoriali

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \vec{V} grad(B)$$

Dunque la variazione di B vista da un osservatore in moto con la particella ("lagrangiano") è somma della variazione "locale" del campo di B: $\frac{\partial B}{\partial t}$ come vista da un osservatore fisso ("euleriano") + quella dovuta al fatto che l'osservatore si muove con velocità $\vec{V}$ in un campo di B che varia nello spazio $grad(B)$ (Convettiva).
La stessa cosa si puo' fare per un vettore, ad esempio per la velocità della particella $\vec{V}$, come si è visto sopra.

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \overline{V}}{\partial X} + V_y \frac{\partial \overline{V}}{\partial Y} + V_z \frac{\partial \overline{V}}{\partial Z}$$

La relazione per $\vec{V}$ si puo' anche scrivere come

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} grad(\vec{V}) \qquad \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla(\vec{V})$$

Basta estendere il concetto di gradiente per applicarlo ad un vettore

Dunque l'accelerazione totale, vista da un punto in moto è somma di un'accelerazione locale $\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}$ e di un'accelerazione convettiva $V_x \frac{\partial \overline{V}}{\partial X} + V_y \frac{\partial \overline{V}}{\partial Y} + V_z \frac{\partial \overline{V}}{\partial Z}$

Esercizio: ripetere questi ragionamenti per un punto di cui sia nota la traiettoria e la legge del moto s(t), dove "s" è la coordinata curvilinea lungo la traiettoria stessa. Ciò serve a comprendere il " trinomio di Bernouilli", illustrato nel seguito.

Quando le derivate locali ("euleriane") sono nulle, il moto si dice permanente o stazionario. E' evidente che anche in condizioni di moto stazionario puo' esserci un'accelerazione di una particella

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

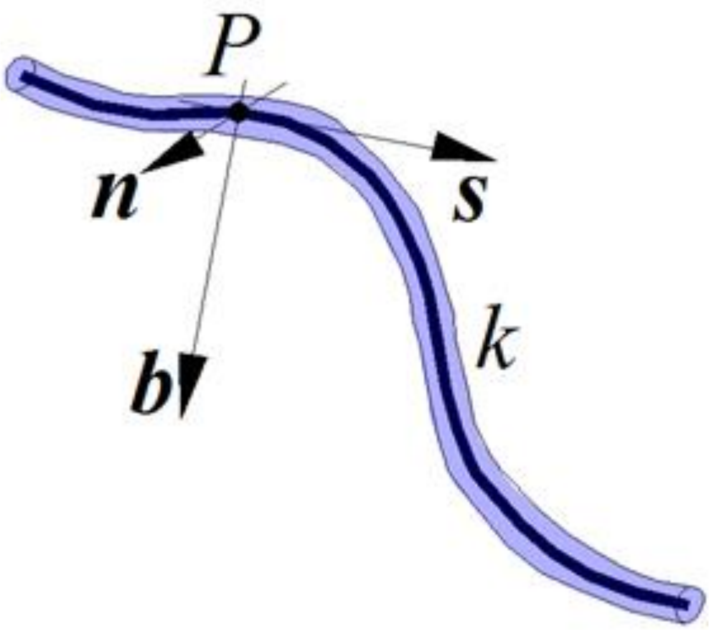
Il moto permanente (in cui cioè tutte le derivate locali rispetto al tempo sono nulle, si dice "permanente" o "stazionario". Nel moto "uniforme" invece, le derivate spaziali sono nulle. Queste definizioni sono molto importanti.

IL PRINCIPIO DI BERNOUILLI

Tratteremo del problema dei liquidi in movimento riprendendo l'equazione differenziale del movimento per liquidi perfetti

$$\underline{\nabla} p = \rho \left(\underline{g} - \frac{d\underline{u}}{dt} \right)$$

giungendo a derivare l'equazione di Bernoulli, valida per una traiettoria in regime di moto permanente.
Sia dato il filetto elementare centrato sulla traiettoria k, appartenente ad un campo liquido in moto permanente (si ricorda che, in tal caso, traiettorie e linee di corrente coincidono).
Per un generico punto spaziale P∈k, si consideri la terna di Frenet (o intrinseca) {s,n,b}. Nello specifico, il versore s identifica la direzione tangente, n è il versore lungo la ***normale e*** ***b è il versore binormale, ortogonale ai***



precedenti

Rispetto alla terna introdotta, il gradiente di pressione $\underline{\nabla p}$, la forza esterna per unità di massa g e l'accelerazione $\frac{\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{dt}}$ ammetteranno rispettivamente componenti $\{\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial n}, \frac{\partial p}{\partial b}\}$, {gs, gn, gb} e $\{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dt}}, \frac{u^2}{r}, 0\}$, dove u è il modulo del vettore velocità u ed r è il raggio di curvatura locale in P.

Sviluppando ulteriormente la componente as dell'accelerazione lungo la tangente e ricordando la regola di derivazione Euleriana risulta:

$$a_s = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

In cui è stato eliminato il termine locale dell'accelerazione per l'ipotesi di moto stazionario.

Proiettando dunque l'equazione vettoriale sulla terna intrinseca (tangente, normale e binormale [1]) siottiene rispettivamente

La componente a_b dell'accelerazione lungo la binormale è nulla giacché il vettore $\frac{\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{dt}}$ è contenuto nel piano osculatore ***s-n***. Inoltre, poiché ***g*** è un campo centrale, risulta conservativo e pertanto munito di potenziale scalare *U*. Nello specifico, *U*=-*gz*.

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho\left[\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]$$

- *energia di pressione specifica* $\frac{p}{\gamma}$: corrisponde al lavoro che lo sforzo normale d$p\underline{\boldsymbol{s}}$ ds compie per uno spostamento infinitesimo lungo la traiettoria $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = u\mathrm{d}t\boldsymbol{s}$.

$$\cancel{\mathrm{d}L_\mathrm{p} = dp\underline{\boldsymbol{s}}\mathrm{d}\sigma \cdot u\mathrm{d}t\underline{\boldsymbol{s}} = \frac{dp}{\rho g}g(\rho\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s) = d\left(\frac{p}{\gamma}\mathrm{d}m\, g\right)}$$

[1] Vedi per esempio http://www.treccani.it/enciclopedia/terna-intrinseca_%28altro%29/

Si consideri ora il filetto elementare centrato sulla traiettoria k inclusa nel tubo di flusso. Siano ds1∈S1 e ds2∈S2 le sue areole di ingresso e di uscita.

$$\mathrm{d}q = u_1 \mathrm{d}\sigma_1 = u_2 \mathrm{d}\sigma_2$$

La corrente sia caratterizzata da un verso di portata parallelo e concorde con il versore n1, identificativo della giacitura di S1 e da un verso di portata parallelo e discorde con il versore n2, identificativo della giacitura di S2.

Si definisce <u>potenza elementare</u> della massa liquida in transito attraverso la generica areola ds del filetto, la quantità:

$$\mathrm{d}W = \gamma\, H\, \mathrm{d}q$$

dove H è il carico totale riferito alla traiettoria k.
La potenza elementare, espressa in W (Watt) nelle unità del S.I., è il prodotto di tre quantità invariabili lungo la traiettoria ragion per cui essa stessa resta invariabile. Con riferimento alle areole di ingresso e di uscita è possibile allora scrivere

$$\gamma\, H_1 u_1\, \mathrm{d}\sigma_1 = \gamma\, H_2\, u_2\, \mathrm{d}\sigma_2$$

Ne deriva che la potenza della corrente nella sezione S1 è uguale alla potenza nella sezione S2, ovvero:

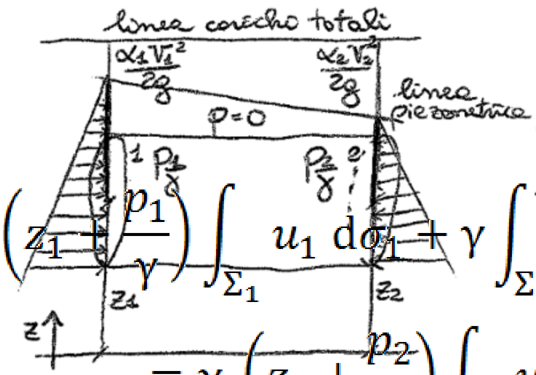
O anche, esplicitando il carico totale H:

$$\gamma \int_{\Sigma_1} H_1 u_1\, \mathrm{d}\sigma_1 = \gamma \int_{\Sigma_2} H_2\, u_2\, \mathrm{d}\sigma_2$$

Nell'ipotesi di corrente rettilinea (filetti sostanzialmente rettilinei e paralleli) sulle sezioni estreme S1 e S2, la quota piezometrica $z + \frac{p}{\gamma}$ è su di esse costante.

$$\gamma \int_{\Sigma_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g}\right) u_1\, \mathrm{d}\sigma_1 = \gamma \int_{\Sigma_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}\right) u_2\, \mathrm{d}\sigma_2$$

•
Sulle dette sezioni, la pressione p risulta quindi distribuita secondo legge idrostatica, variando secondo legge lineare.



$$\gamma\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)\int_{\Sigma_1} u_1\,\mathrm{d}\sigma_1+\gamma\int_{\Sigma_1}\frac{u_1^3}{2g}\,\mathrm{d}\sigma_1 = \gamma\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)\int_{\Sigma_2} u_2\,\mathrm{d}\sigma_2+\gamma\int_{\Sigma_2}\frac{u_2^3}{2g}\,\mathrm{d}\sigma_2$$

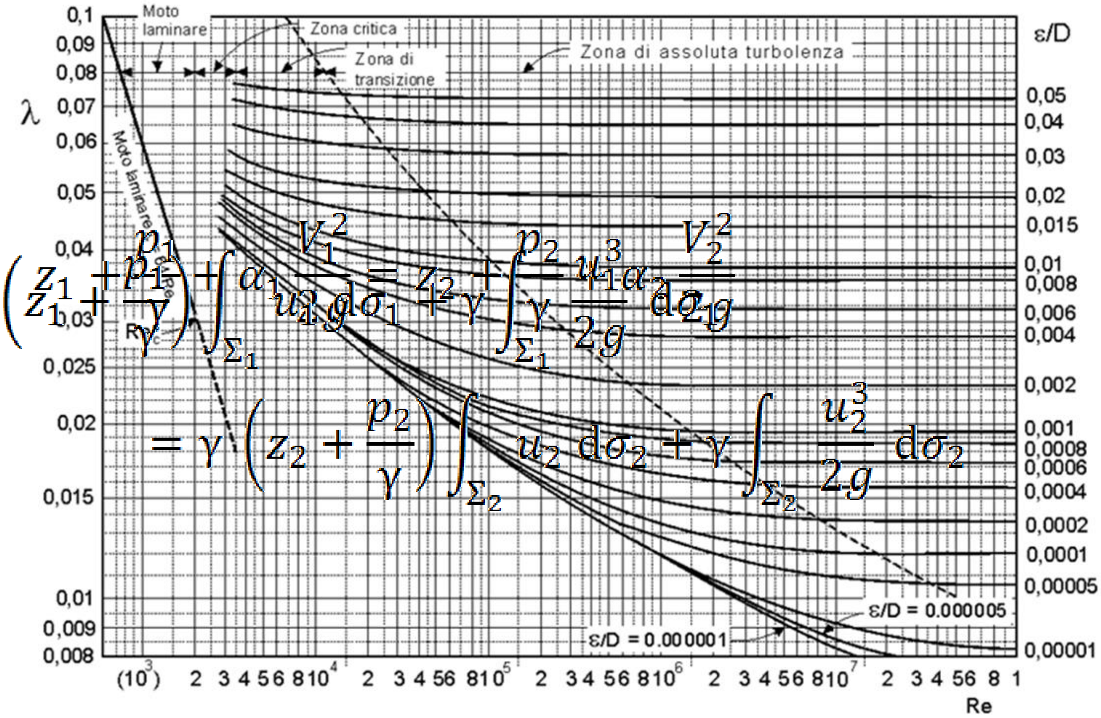
$$\gamma\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)\int_{\Sigma_1} u_1\,\mathrm{d}\sigma_1+\gamma\int_{\Sigma_1}\frac{u_1^3}{2g}\,\mathrm{d}\sigma_1 = \gamma\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)\int_{\Sigma_2} u_2\,\mathrm{d}\sigma_2+\gamma\int_{\Sigma_2}\frac{u_2^3}{2g}\,\mathrm{d}\sigma_2$$

I rimanenti integrali di superficie non sono in genere di agevole risoluzione. Il loro computo richiederebbe la conoscenza della distribuzione della velocità sull'intera sezione trasversale. Tale informazione non sempre è disponibile. Si preferisce pertanto riassumere la variabilità spaziale della velocità al cubo nel coefficiente di Coriolis, o coefficiente di ragguaglio delle potenze cinetiche:

$$\alpha_{\mathrm{i}}=\int_{\Sigma_2}\frac{u_{\mathrm{i}}^3}{V_{\mathrm{i}}^3\Sigma_{\mathrm{i}}}\,\mathrm{d}\sigma_i,\quad i=1,\,2$$

Si ha quindi:

formalmente identica all'eq. di Bernoulli riferita alla singola traiettoria, se non fosse per il coefficiente a, moltiplicativo del termine cinetico e per la presenza della velocità media. I membri dell'equazione sopra scritta rappresentano per analogia il trinomio di Bernoulli riferito ad una corrente.



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\gamma\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right)\int_{\Sigma_1} u_1 \,\mathrm{d}\sigma_1 + \gamma\int_{\Sigma_1} \frac{u_1^3}{2g}\,\mathrm{d}\sigma_1$$

$$= \gamma\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)\int_{\Sigma_2} u_2 \,\mathrm{d}\sigma_2 + \gamma\int_{\Sigma_2} \frac{u_2^3}{2g}\,\mathrm{d}\sigma_2$$

$$J = \frac{\mathrm{l}\, V^2}{2\, g\, D} = \frac{8\, \mathrm{l}\, Q^2}{g\, \mathrm{p}^2 D^5} \quad [-]$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{u^2}{r}\right)$$

I) IL TEOREMA DI GAUSS

Le applicazioni del Teorema di Gauss (o lemma di Green) sono assai frequenti in Meccanica dei Fluidi ed nelle discipline collegate; gran parte dei testi vi fanno continuo e frequente riferimento.
Nel seguito tale teorema - solitamente dimostrato in forma scalare nei testi di Analisi elementare - è espresso in termini vettoriali, senza pretesa di completezza o di rigore formale ed al solo scopo di inquadrare in un unica formulazione le numerose applicazioni alla MdF .

Sia VC un volume di controllo, S la sua superficie di frontiera, $\overline{n}$ la normale positiva entrante, $\overline{\overline{T}}$ un tensore del secondo ordine; si ha

$$\int_S \overline{\overline{T}}.\overline{n}dS = -\int_{Vc} div\overline{\overline{T}}.dV \qquad (*)$$

("L'integrale della divergenza di un tensore è eguale al flusso del tensore sulla frontiera")

La (*) può facilmente essere applicata ad un vettore anziché ad un tensore del secondo ordine (si pensi al caso del flusso q di massa o di energia):

$$\int_S \overline{T}.\overline{n}dS = -\int_{Vc} div\overline{T}.dV$$

Una applicazione importante di questa relazione si trova in tutti i casi in cui si passa dalla formulazione locale a quella globale delle equazioni cosiddette di bilancio, e cioè quelle della massa (continuità) e della quantità di moto (Equazione globale dell'idrodinamica). In quest'ultima $\overline{\overline{T}}$ (o $\overline{\overline{\Phi}}$) è il tensore degli sforzi

L'esempio più semplice è quello della continuità. Si applichi, come esercizio, il teorema di Gauss all' equazione della continuità stabilendo il collegamento tra la forma globale e quella differenziale.

L'applicazione all' equazione della quantità di moto ("equazione dell' equilibrio idrodinamico") è più complessa, ma analoga.

Esempio
Limitandosi ad un caso particolare, si faccia riferimento alle ipotesi di "fluido perfetto"
In tali ipotesi, ed a maggior ragione in quelle dell' idrostatica (sforzi tangenziali nulli, sforzi normali eguali fra di loro), il tensore T è diagonale e sferico e si ha dunque

$$\overline{\overline{\Phi}} = p\ \overline{\overline{I}}$$

dove p è la pressione ed $\overline{\overline{I}}$ è la matrice identica, si ha anche

$$\mathrm{div}\ (p\ \overline{\overline{I}}) = \mathrm{grad}\ (p) \qquad (**)$$

nonché

$$\overline{\overline{T}}.\overline{n} = p\ \overline{n} \qquad (***)$$

come si verifica facilmente sulle componenti.

Tramite la (***) e la (**), la (*) diventa

$$\int_{Vc} div(p\bar{\bar{I}})dV = -\int_{S} p\bar{n}.dS \qquad (****)$$

ovvero

$$\int_{Vc} grad(p\bar{\bar{I}})dV = -\int_{S} p\bar{n}.dS \qquad (*)$$

che è la forma che alcuni testi impiegano, dopo averla derivata direttamente dalla forma scalare del teorema di Gauss, per presentare l ' equazione globale dell'idrostatica.

II) Le **equazioni di bilancio**

Questo paragrafo (che non è parte del programma di esame) interrompe la successione logica dei concetti di meccanica del continuo. Esso non fa parte del programma di esame; tuttavia, una volta acquisito, serve a comprendere meglio i termini della c.d. “equazione globale”, illustrata sopra, ed anche il “Teorema di Bernoulli” studiato nella prima parte del corso.
Parte dei contenuti che seguono sono comuni al corso di Principi di Ingegneria Chimica; esso aiuta quindi a a riconoscere gli stessi concetti espressi in maniera lievemente diverse nelle due discipline

Si chiamano "conservative" quelle funzioni di campo b(x, y, z, t) per cui si può scrivere una "equazione di bilancio", e cioè una equazione, relativa ad un volume di controllo, che abbia la forma

“Variazione” = “flusso attraverso la frontiera” + “Produzione “.

Le equazioni di bilancio sono conseguenza diretta dei principi fondamentali della fisica applicati ai corpi continui: i casi considerati in questo corso sono unicamente quelli del bilancio di massa (equazione di continuità) e quello della quantità di moto (equazione dell'idrodinamica)

Attraverso questi esempi ci si rende conto che la grandezza b(x, y, z, t) di cui si fa il bilancio può essere sia un vettore, sia uno scalare; le grandezze conservative sono solitamente (ma non sempre) associate alla massa, tanto che spesso è conveniente assumere :

$$b(x, y, z, t) = \rho\,(x, y, z, t) * c(x, y, z, t)$$

dove ρ (x, y, z, t) è la densità e c(x, y, z, t) è la grandezza specifica relativa alla massa; per fissare le idee, si pensi alla quantità di moto, $\rho\,(x, y, z, t).\vec{V}\,(x, y, z, t)$: in questo caso c(x, y, z, t) è proprio la velocità.

Ancora, nel caso del bilancio dell'energia termica e(x, y, z, t), è talora opportuno evidenziare che:

$$e(x, y, z, t) = r(x, y, z, t) * Cs * T(x ,y, z, t)$$

dove Cs è il calore specifico del mezzo e T(x, y, z, t) è ovviamente la temperatura.

La forma generale di un'equazione di bilancio in forma globale, e riferita ad un volume di controllo V_C di cui S è la superficie di frontiera (“contorno), si scrive

(1a) (1b) (2) (3)

$$\int_{Vc} -\frac{\partial b}{\partial t}\, d\tau + \int_S b\overline{V}..\vec{n}\,dS + \int_S \vec{\Phi}_b\, dS + \int_{Vc} P_b\, d\tau = 0$$

Se b(x, y, z, t) è un vettore (il solo caso importante è la quantità di moto: $\rho(x, y, z, t)\,\vec{V}(x , y, z, t)$ = ,la relazione di bilancio qui sopra sostanzialmente non cambia; l'unica avvertenza è che nel termine (1b) il prodotto $b\overline{V}..$ diventa un prodotto tensoriale $b\overline{V}..\overline{V}..$ e quindi si ha:

E quindi

$$\int_S \rho(\overline{V}\overline{V}).\overline{n}.dS = \int_S \rho\overline{V}V_n dS$$

mentre, naturalmente, tutti gli altri termini salgono di un ordine (i vettori diventano tensori, gli scalari, tensori)

Il termine (1a) è la variazione temporale della grandezza; in altre parole il suo accrescimento o la sua diminuzione (ad es, per la quantità di moto, l'accelerazione locale, indicata nel seguito e nel libro come $\vec{\mathrm{I}}$; riscaldamento o raffreddamento se b è l'energia termica).

(1b) "Flusso convettivo" è il trasporto della grandezza b con il fluido, attraverso le pareti; quando infatti esiste un flusso di fluido, evidentemente a questo si accompagna un trasporto della grandezza b che è associata al fluido (ad es. Flusso di quantità di moto $\overline{\rho V}$ indicato nel seguito come $\vec{\mathrm{M}}$: se entra fluido in un volume di controllo entra evidentemente anche la quantità di moto o il flusso termico, cioè l ' energia termica ad esso associata).

(3) è la produzione (intesa anche in senso algebrico, quindi anche distruzione) di b; nel caso della quantità di moto essa è semplicemente l'azione delle forze di massa, in particolare del peso $\rho\vec{\mathrm{g}}$, indicata nel seguito come $\vec{\mathrm{G}}$. Considerando ancora l ' esempio dell'energia termica, la produzione può essere causata da una reazione chimica esotermica, la distruzione da una reazione endotermica)

Il termine (2) "Flusso diffusivo "è stato lasciato per ultimo perché una sua possibile definizione è quella "per esclusione": esso è il flusso di b che NON è associato al flusso di massa. In termini di quantità di moto essa è l'integrale dell'azione degli sforzi superficiali $\overline{\overline{\phi}}.\vec{n} = \vec{\phi}_n.\vec{n}$ indicata nel seguito come $\vec{\Pi}$ Esso ha alla sua origine i fenomeni che avvengono su base molecolare e cioè non i movimenti "visibili" di massa (che sono descritti dal termine (1b)) bensì effetti derivanti da azioni microscopiche (interazioni tra molecole).

Il flusso di calore per conduzione ne è un esempio evidente e tipico; ma altrettanto evidente è il fatto che - nell'equazione globale dell'Idrodinamica le forze che agiscono alla superficie del volume di controllo costituiscono un flusso di quantità di moto (cioè una forza) non associato al movimento di massa bensì alla pressione o alla viscosità (entrambi effetti a carattere molecolare, come si comprende considerando la teoria cinetica dei gas) [2]

Si è già detto dei segni dei vari termini: sono possibili diverse forme, a seconda che si assuma positivo il verso della normale entrante od uscente positivi oppure negativi gli sforzi di trazione.

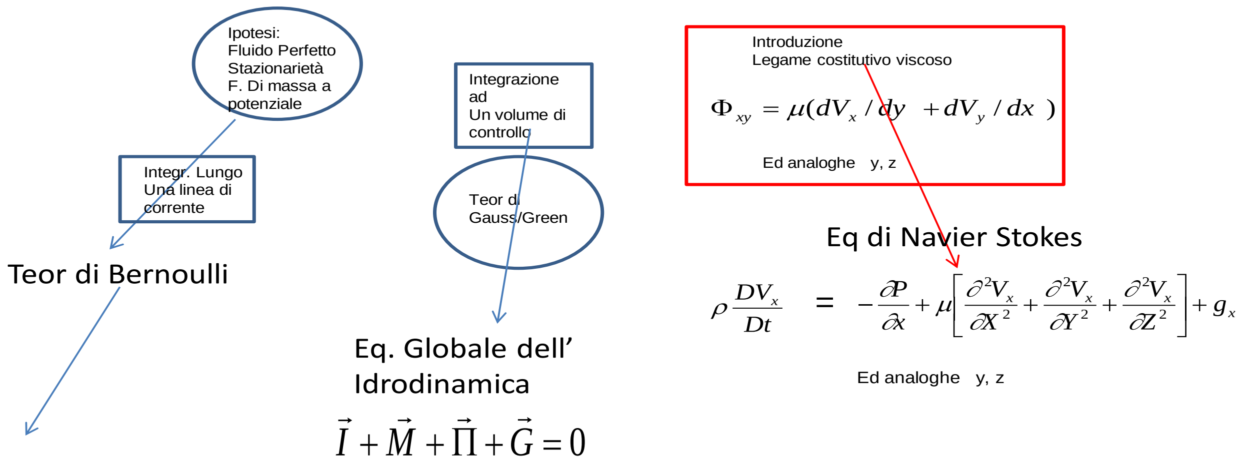
Tutte le equazioni di bilancio possono essere espresse in forma globale - che è quella che abbiamo esaminato ora - oppure in forma differenziale (anche: "indefinita"). Si passa dall'una all'altra forma impiegando il teorema di Gauss, ed alcuni passaggi intermedi che - in particolare per il caso dei fluidi compressibili - possono essere abbastanza complessi.

III LE VIE DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

Nella figura seguente è esposto lo schema logico dei principali strumenti della meccanica dei fluidi:muovendo dall'equazione indefinita dell'equilibrio idrodinamico (= quantità di moto) , si possono seguire diverse strade:

[2] L'introduzione degli sforzi di Reynolds in regime turbolento (che verrà trattata in seguito) consiste nello spostare il trasporto di q.d.m associato alle fluttuazioni turbolente da $\vec{M}$ a $\vec{\Pi}$ ed a considerarle appunto come sforzi. Analogamente per i flussi turbolenti di energia termica, sostanza disciolta, etc

$$\rho d\overline{V} / dt = \overline{\rho f} - div\overline{\overline{\Phi}}$$



Prima parte
del corso
"Idraulica Ambientale"

Seconda parte del corso
"Fluidodinanica Ambientale"

I percorsi a sinistra ed al centro (in blu) sono quelli tradizionali dell'Idraulica, essenziali per molti problemi pratici, e sono quelli seguiti in questo corso. Il percorso a destra, indicato in rosso, prevede la formulazione differenziale completa (quindi, con l'aggiunta del legame costitutivo). Questa via è divenuta di pratica utilità solo negli ultimi trent'anni con lo sviluppo della Meccanica dei Fluidi Numerica (CFD, Computational Fluid Mechanics), e richiede uno studio apposito ed approfondito: la sua formulazione essenziale (equazione di Navier Stokes) deve essere però compresa fin da adesso, per meglio inquadrare molti problemi.
Si ricorda che accanto all'equazione delle quantità di moto va sempre considerata anche l'equazione della continuità, anch'essa esprimibile in forma differenziale o in forma integrale. Essa è però molto più semplice da trattare.

IV Moto viscoso in un sistema molto semplice (Viscosimetro)

Un albero di diametro R ruota con velocità angolare ω in una cavità di raggio R+d. C'è quindi una cavità larga d, che si può considerare (poiché d<<R) rettangolare e di lunghezza infinita.
Si crea nel fluido un campo di moto molto semplice: l'unica componente di velocità non nulla è quella tangenziale Vs, che vale :
Vs = 0 sulla superficie esterna
Vs = Vo= ω R sulla superficie interna.
(Il diagramma della velocità è quello visto da un osservatore fisso; la velocità relativa fluido-solido è sempre 0)
La derivata della velocità ∂Vs/∂r è dunque = Vo/d
Lo sforzo tangenziale interno esercitato in direzione s sulla superficie di normale r vale dunque Φrs = μ (∂Vs/∂r)= μ Vo/d
Qual'è il suo verso?
Se si intende lo sforzo che gli strati interni esercitano su quelli esterni (osservatrice sull'osservatore), il verso è quello della freccia verde.
Se si intende lo sforzo che gli strati esterni esercitano su quelli interni (l'osservatore sull' osservatrice), il verso è quello opposto alla freccia verde.

Lo schema è alla base di un semplice strumento per misurare la viscosità μ. Ad esempio, si impone la velocità angolare ω, e si misura il momento resistente Mr.

Qual è la relazione risolutiva che lega μ con Mr?