

APPLICAZIONI DEI PRINCIPI DI BASE IN FORMA INTEGRALE



Una turbina Pelton

AA 2021-2022

Avvertenze

Alcune parti **sono segnate o marcate in blu**: vuol dire che non sono comprese nel programma di idraulica/fluidodinamica ambientale. Se il **titolo del paragrafo è marcato**, l'intero paragrafo NON è in programma. Esse possono tuttavia essere interessanti, o utili per raccordare i concetti di questo corso con quelli di altri (scienza delle costruzioni, fisica tecnica, principi di ingegneria chimica etc.)

Neanche le parti marcate in **giallo** sono comprese nel programma. Sono curiosità che possono interessare.

In corsivo gli esercizi ed applicazioni che bisogna svolgere autonomamente

Questo blocco di appunti illustra alcune applicazioni dei principi di base in forma integrale, cioè NON impiegando le equazioni fondamentali in forma differenziale: principalmente dunque l'equazione globale dell'idrodinamica, per le sue applicazioni pratiche e come base per importanti sviluppi teorici; inoltre anche due applicazioni importanti del teorema di Bernoulli ed un esempio sui coefficienti di ragguglio.

Fare attenzione alle unità impiegate, che sono quelle del Sistema Internazionale: Metro, Kilogrammo Massa Kg, Secondo. Bisogna anche conoscere il Sistema Tecnico (Metro, Kilogrammo peso Kgp, Secondo), in cui la densità ρ è una grandezza derivata ($\rho = \gamma / g$); alcuni vecchi testi impiegano il simbolo Kg per il Kilogrammo peso (convenzione sorpassata da evitare) *E' necessario ed importante sapere passare da un sistema all'altro-*

Il blocco è così articolato:

Applicazioni dell'equazione globale –

Calcolo delle spinte idrodinamiche:

su tubazioni e macchinari chiusi

su volumi di controllo in parte esposti all'aria

Lo sforzo di trascinamento

Lo sforzo interno in un condotto

Il profilo di velocità nel moto viscoso (Poiseille)

Due applicazioni del teorema di Bernoulli alle correnti (Tubo di Pitot e venturimetro)

Gli ultimi due paragrafi non riguardano l'equazione globale, ma sono estensioni e chiarimenti di concetti della prima parte del corso

Un richiamo ed un esempio dei coefficienti di Coriolis

Applicazioni dell'equazione globale – calcolo delle spinte idrodinamiche

In questo tipo di applicazioni,

-il primo passo è sempre quello di definire il volume di controllo e la relativa superficie di frontiera.

-negli esempi, così come spesso avviene nella realtà dei problemi di ingegneria, occorre anche preliminarmente calcolare alcuni dei parametri (pressioni, velocità) ricorrendo ad altri strumenti: teorema di Bernoulli, continuità.

Nel seguito il fluido si presume sempre incompressibile ed il moto stazionario.

Nel calcolo delle spinte idrodinamiche è sempre consigliabile usare le pressioni relative¹, che qui si definiscono come date dalla differenza tra le pressioni assolute e la pressione ambiente. $P_r = P_a - P_{AMB}$. Ovviamente, se P_{AMB} è proprio la pressione atmosferica, si ricade nella definizione già incontrata.

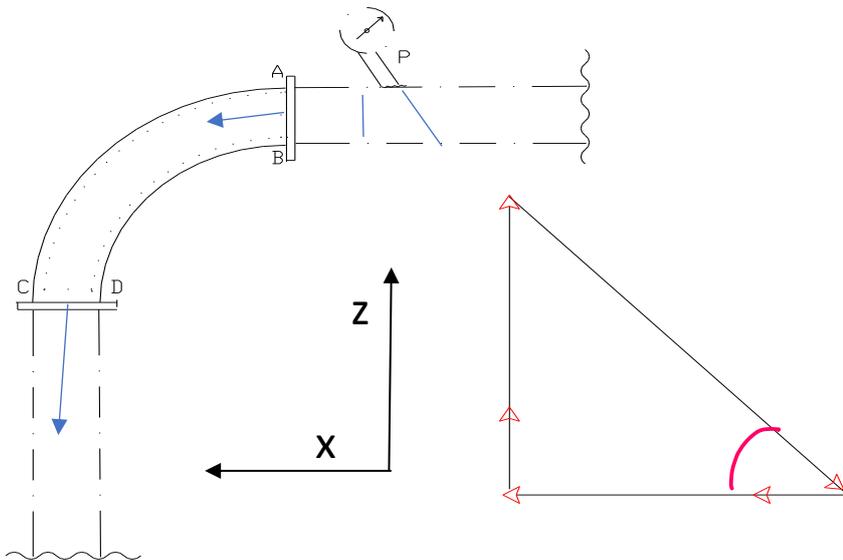
Talvolta per semplicità vengono trascurate le forze di volume (come ad esempio il peso) perché il loro calcolo è complicato ma non pone nessun problema concettuale

Qualche volta (non sempre) viene assunta l'ipotesi di "fluido perfetto" (cioè si possono trascurare gli sforzi tangenziali).

Tubazioni e macchinari chiusi

Tronco di tubazione a 90°

Il fluido che scorre in una tubazione esercita una forza \vec{F} (spinta idrodinamica) sulle sue pareti; occorre valutarne l'entità



$$\Theta = \text{Atan} \left(\frac{\pi c d + M c d}{\pi a b + M a b} \right)$$

Si assume nota la geometria, la portata q e la pressione P_{AB} sulla superficie S_{AB} ;

Il fluido entra nel tubo attraverso la sezione AB e scorre via attraverso la sezione CD; il fluido si presume incompressibile ed il moto stazionario.

In questo caso il volume di controllo è facilmente definibile come volume ABCD occupato dal fluido nei tratti di tubo; la sua superficie di frontiera è dunque data dalle due sezioni AB e CD, e dalla superficie interna del tubo, che nel seguito indicheremo con "0"

¹ Questo perché quello che veramente interessa non è la spinta, ma la differenza tra la spinta in condizioni idrodinamiche e quella presente in condizioni statiche. Più complesso è il caso - qui non considerato - in cui il corpo si muove rispetto al fluido ambiente.

Per semplicità (1) trascureremo le forze di volume (come ad esempio il peso). Inoltre riterremo (2) che le velocità \vec{V}_{AB} e \vec{V}_{CD} siano costanti nelle superfici di ingresso e di uscita e normali ad esse. Questo tra l'altro implica che non ci sono sforzi tangenziali su tali superfici².

Applicando dunque l'equazione globale dell'idrodinamica al volume ABCD:

$$\vec{I} + \vec{M} + \vec{\Pi} + \vec{G} = 0$$

I termini rappresentano rispettivamente l'inerzia locale, il Flusso di Qdm, le Forze di Superficie, e la Forza di Massa, Secondo le nostre ipotesi 1 e 2, G ed I sono nulli e quindi:

$$\vec{\Pi} + \vec{M} = 0$$

che si può scomporre come segue:

$$\vec{\Pi}_{AB} + \vec{\Pi}_{CD} + \vec{\Pi}_0 + \vec{M}_{AB} + \vec{M}_{CD} + \vec{M}_0 = 0$$

Si vede immediatamente che il termine \vec{M}_0 , flusso della quantità di moto attraverso la parete laterale è eguale a 0, perché la componente Vn normale alla parete è nulla

$\vec{\Pi}_0$ è la forza esercitata dalla parte interna della tubazione sul fluido, cosicché essa è eguale in modulo, e di verso opposto, all'incognita \vec{F} . La relazione risolutiva dunque diventa:

$$\vec{F} = \vec{\Pi}_{AB} + \vec{\Pi}_{CD} + \vec{M}_{AB} + \vec{M}_{CD}$$

Per quanto detto prima (assenza di sforzi tangenziali) $\vec{\Pi}_{AB}$ e $\vec{\Pi}_{CD}$ si riducono agli integrali della sola pressione sulle due superfici di ingresso ed uscita; hanno quindi la direzione delle rispettive normali, e verso entrante.

$$\vec{\Pi}_{AB} = \int_{AB} p \vec{n} \cdot dS \quad \vec{\Pi}_{CD} = \int_{CD} p \vec{n} \cdot dS$$

I due termini di flusso della quantità di moto attraverso le stesse superfici AB ed CD,

$$\vec{M}_{CD} = \int_{CD} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad \vec{M}_{AB} = \int_{AB} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Essi hanno la direzione delle normali alle sezioni di ingresso e uscita della tubazione, e verso sempre verso l'interno; infatti:

il segno di Vn è positivo per la portata entrante, negativo per la portata uscente - come risulta dal prodotto scalare $Vn = \vec{V} \cdot \vec{n}$. Dunque il verso di \vec{M}_{AB} è concorde con quello di \vec{V}_{AB} , mentre il verso di \vec{M}_{CD} è discorde da quello di \vec{V}_{CD} ed è quindi rivolto verso l'interno³

Per quello che riguarda i moduli si ha:

² Gli sforzi tangenziali viscosi derivano dai gradienti della velocità sul piano di azione. Se non ci sono componenti sul piano della superficie di entrata, dunque non ci sono sforzi tangenziali sulla stessa superficie

$$M_{AB} = \rho \beta_{AB} V_{AB}^2 S_{AB}$$

$$M_{CD} = \rho \beta_{CD} V_{CD}^2 S_{CD}$$

Dove i coefficienti sono i coefficienti di Coriolis di ragguglio del flusso di quantità di moto. Nella pratica si assume spesso l'ipotesi che i β siano eguali ad 1 (profili di velocità piatti)⁴
 In genere è accettabile l'ipotesi che la pressione P su ciascuna sezione di ingresso o di uscita sia costante e quindi assumendo un valore medio si ha anche

$$\Pi_{AB} = P_{AB} S_{AB}$$

$$\Pi_{CD} = P_{CD} S_{CD}$$

I versi sono facilmente determinabili in questo caso.

A questo punto occorre introdurre valori numerici, che si possono ottenere dai dati iniziali, eventualmente elaborandoli con le altre leggi fisiche: essenzialmente il teorema di Bernoulli e l'equazione di continuità.

In questo caso si usano entrambi.

Le velocità si possono facilmente calcolare con l'equazione di continuità

$$q = V_{AB} S_{AB} = V_{CD} S_{CD} \quad V_{CD} = V_{AB} S_{AB} / S_{CD}$$

e la pressione P_{CD} con Bernoulli:

$$P_{CD} = P_{AB} + \rho V_{AB}^2 / 2 - \rho V_{AB}^2 (S_{AB}^2 / S_{CD}^2) / 2$$

Se la tubazione è a sezione costante ($S_{AB} = S_{CD}$) si semplifica ulteriormente

Non è stata introdotta la quota Z perché si è assunto che il peso sia trascurabile. In ogni caso se i dati sono disponibili, non è difficile tenerne conto.

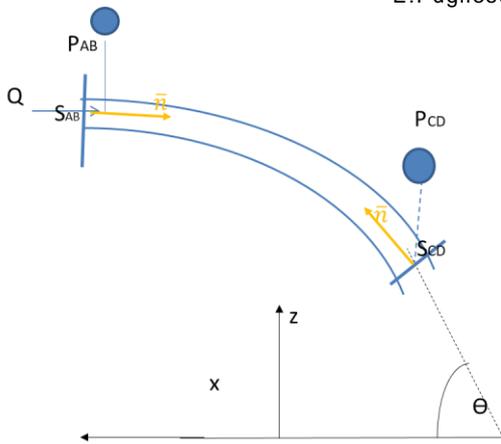
Rifare l'esercizio considerando anche l'effetto della quota Z. Come si valuta in questo caso la pressione P_{AB} ?

La forza risultante si può calcolare graficamente oppure per componenti. Per evitare confusioni ed ambiguità è *utile costruirsi un diagramma vettoriale qualitativo dei termini della relazione risolutiva. E' infatti conveniente prima visualizzare graficamente i diversi vettori e solo dopo proiettarli lungo gli assi x ed y.*

In questo esempio è stato usato il teorema di Bernoulli per fluidi perfetti per calcolare la variazione di pressione tra AB e CD perché in mezzo NON ci sono macchine o perdite di carico. (ipotesi di "fluido perfetto")

Un esercizio analogo, un po' più complicato si ottiene assumendo che l'asse della sezione di uscita CD faccia un angolo Θ diverso da 90° con quello della sezione d'ingresso. Assumiamo anche qui che P_{AD} così come la portata q e tutta la geometria siano noti.

⁴ E' talvolta utile indicare i termini del tipo $V_{AB}^2 S_{AB}$ come $V_{AB} q$, essendo $q = V_{AB} S_{AB} = V_{CD} S_{CD}$; q è ovviamente la portata, quindi $M_{AB} = \rho \beta_{AB} V_{AB} S_{AB} = \rho \beta_{AB} q$; $M_{CD} = \rho \beta_{CD} q$



Finché si utilizzano le formule in termini vettoriali, tutto è invariato.

$$\vec{\Pi}_{AB} + \vec{\Pi}_{CD} + \vec{\Pi}_0 + \vec{M}_{AB} + \vec{M}_{CD} + \vec{M}_0 = 0$$

(conviene anche qui costruire un diagramma qualitativo dei vettori.
Proiettando lungo gli assi X e Z prescelti si ha :

$$M_{ABx} = -\rho \beta_{AB} V_{AB}^2 S_{AB} \quad (\text{il verso del vettore è opposto al versore dell'asse } x \text{ prescelto})$$

$$M_{CDx} = \rho \beta_{CD} V_{CD}^2 S_{CD} \cos \theta$$

$$\Pi_{ABx} = -P_{AB} S_{AB}$$

$$\Pi_{CDx} = P_{CD} S_{CD} \cos \theta$$

$$M_{ABz} = 0$$

$$M_{CDz} = \rho \beta_{CD} V_{CD}^2 S_{CD} \sin \theta$$

$$\Pi_{ABz} = 0$$

$$\Pi_{CDz} = P_{CD} S_{CD} \sin \theta$$

Si ha

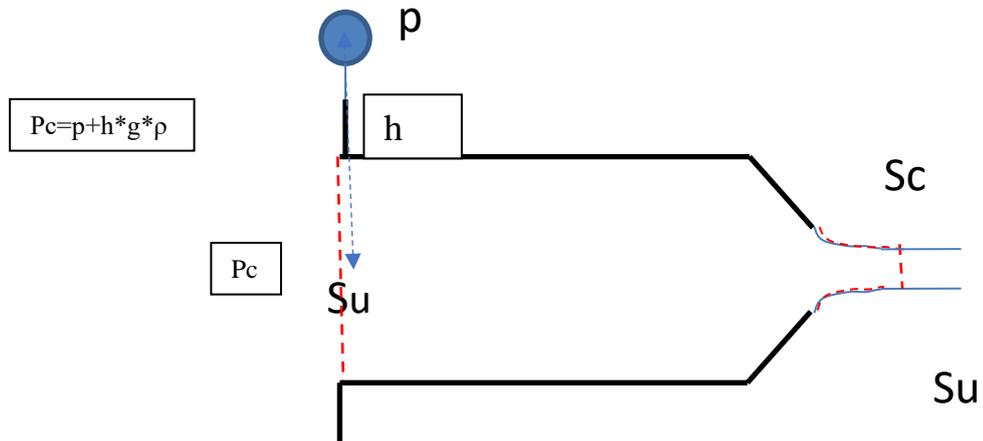
$$F_x = -\rho \beta_{AB} V_{AB}^2 S_{AB} - P_{AB} S_{AB} + \rho \beta_{CD} V_{CD}^2 S_{CD} \cos \theta + P_{CD} S_{CD} \cos \theta$$

$$F_z = \rho \beta_{CD} V_{CD}^2 S_{CD} \sin \theta + P_{CD} S_{CD} \sin \theta$$

Per il calcolo del valore di P_{CD} , si procede come prima:

$$P_{CD} = P_{AB} + \rho V_{AB}^2 / 2 - \rho V_{AB}^2 (S_{AB}^2 / S_{CD}^2) / 2$$

Un'altra geometria tipica è quella di un condotto che si restringe con un tronco di cono e sbocca in atmosfera (idrante); Anche qui si chiede la spinta sul tronco di tubazione. Il problema è analogo al precedente, anzi è più semplice. L'unica accortezza è che nel definire il volume di controllo è opportuno estendersi fino alla sezione contratta dove si può più correttamente assumere che le velocità siano parallele tra di loro e ortogonali alla superficie di frontiera.



Il volume di controllo è dunque quello delimitato dalle pareti (in nero linea spessa), dalla sezione contratta S_c , dalla sezione di ingresso, e dalla superficie del getto fino alla sezione contratta (linea sottile rossa tratteggiata)

Questo non cambia l'azione delle forze $\vec{\Pi}_0$ perché il tratto di tubo di flusso compreso tra S_2 e S_c si trova a pressione relativa $p=0$. Si possono quindi calcolare quindi le velocità col teorema di Bernoulli e la continuità tra S_1 e S_c .

$$\vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_c + \vec{\Pi}_0 + \vec{M}_1 + \vec{M}_c = 0$$

$$F \equiv \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_c + \vec{M}_1 + \vec{M}_c$$

$$P=3atr \quad D1=.5 \quad D2=.2 \quad Cc=.7$$

$$Sc=S2*Cc$$

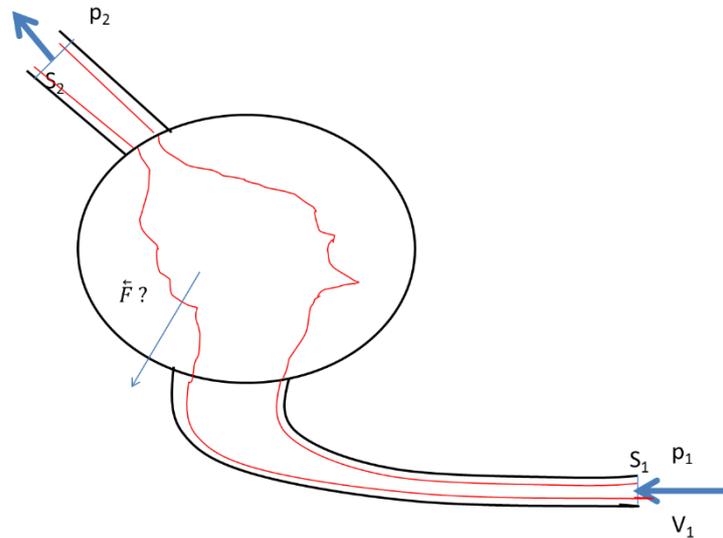
Macchinari, pompe, motori a getto

Lo schema di risoluzione è analogo agli esempi precedenti, ma il calcolo delle pressioni e delle velocità richiede la forma generalizzata del teorema di Bernoulli.

Pompa



Consideriamo la macchina illustrata nella figura seguente: il fluido entra nella macchina (una pompa) attraverso la sezione S_1 con velocità V_1 (note) esce attraverso la sezione S_2 (anch'essa nota). Sono anche note le pressioni di imbocco e di uscita p_1 e p_2 . Si assumono le solite ipotesi di fluido incompressibile e di moto permanente. Il fluido esercita sulla macchina una spinta \vec{F} che si deve calcolare.



Si impiega l'equazione globale dell'idrodinamica, e per farlo, si deve definire un volume di controllo V_c , che è il volume occupato dal fluido all'interno della macchina; la sua forma effettiva non è importante e perciò non c'è necessità di definirla con precisione. La superficie (impermeabile) S_0 di confine tra il macchinario ed il fluido, insieme ad S_1 ed S_2 (che invece sono permeabili) definiscono V_c . La figura mostra – in rosso - una forma curiosa di S_0 per mettere in rilievo la difficoltà della sua definizione precisa. Notare che il volume di controllo comprende anche l'interno delle tubazioni di raccordo, che sono solidali alla macchina. Anche qui non consideriamo alcuna forza di massa, poiché il calcolo di questa è complicato materialmente ma non implica nessuna difficoltà concettuale.

La velocità V_1 è legata immediatamente a V_2 dall'equazione della continuità $V_1 S_1 = V_2 S_2$

Applichiamo ora al volume V_c l'equazione globale della quantità di moto:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{M} + \vec{I} = 0$$

Secondo le nostre ipotesi \vec{G} ed \vec{I} sono nulli e quindi:

$$\vec{\Pi} + \vec{M} = 0$$

Anche qui la forza risultante si può calcolare per componenti, ed anche qui è utile costruirsi un diagramma vettoriale qualitativo dei termini della relazione risolutiva. Si ha, come prima

$$\vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_0 + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

$\vec{\Pi}_0$ è la forza esercitata dalla parte interna della volume di controllo sul fluido, cosicché essa è eguale in modulo, e di verso opposto all'incognita \vec{F} . La relazione risolutiva diventa:

$$-\vec{\Pi}_0 = \vec{F} = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

I singoli termini si calcolano come nell'applicazione precedente.

La differenza rispetto al caso precedente è che non è possibile applicare il teorema di Bernoulli per fluidi perfetti perché all'interno c'è una macchina, perdite di carico, etc. Quindi i valori delle pressioni di ingresso p_1 e di uscita p_2 devono essere assegnati.

$$P1=3 \text{ atr} \quad P2= 2 \text{ ata} \quad q=300 \text{ l/s} \quad D1=.8 \quad D2=.5 \quad V1= 0.300/(\pi/4 D1^2)$$

$$M1=\rho S1 V2^2 \quad P1=3 \cdot 10^5$$

$$M2=\rho S2 V2^2 \quad P2=10^5$$

Il teorema di Bernoulli generalizzato può essere eventualmente usato per calcolare la prevalenza e la potenza della pompa- ma questo non c'entra con l'equazione globale.

Motore a getto

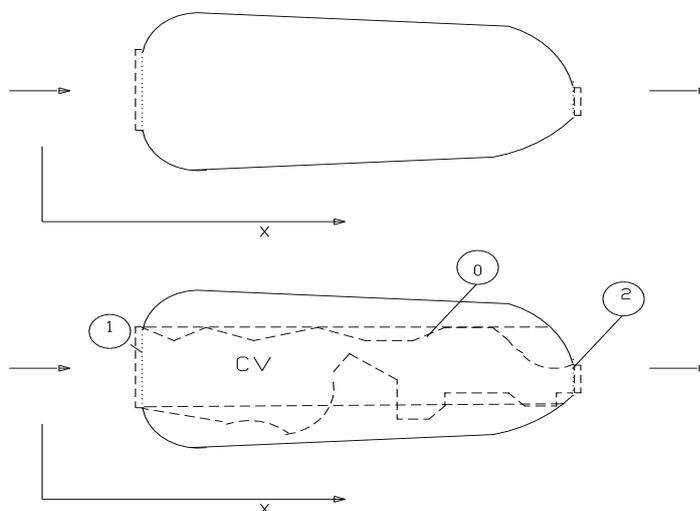


In sostanza, si tratta di una pompa; però poiché l'ingresso e l'uscita avvengono nell'ambiente, sorgono alcune complicazioni. Il fluido entra nella macchina attraverso la sezione 1 ed esce attraverso la sezione 2. Anche qui si impiega l'equazione globale per calcolare la spinta \vec{F} che fluido esercita sulla macchina. Si assumono le solite ipotesi di fluido incompressibile e di moto permanente.

Le superfici S_1 ed S_2 sono parallele tra di loro e le velocità V_1 e V_2 sono normali alle rispettive superfici, e quindi allineate con l'asse x .

$$P1 = -\rho V_1^2 / 2$$

$$P1 = -\rho V_1^2 / 2$$



I motori a getto, compresi gli idrogetti delle imbarcazioni, funzionano su questo principio; ma l'applicazione è utile in molti altri casi.

Il flusso entrante e quello uscente si trovano lungo la stessa direzione, le S_1 ed S_2 sono parallele tra di loro e quindi converrà considerare direttamente la componente F_x della forza \vec{F} lungo la X .

Si definisce come al solito un volume di controllo V_c , che è il volume occupato dal fluido all'interno della macchina e la cui forma effettiva non è importante di per sé, e quindi non può né deve essere definita con precisione.

La superficie (impermeabile) S_0 di confine tra il macchinario ed il fluido, insieme ad S_1 ed S_2 (che invece sono permeabili) definisce la frontiera del volume di controllo:

Applichiamo ora al volume V_c l'equazione globale della quantità di moto:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{M} + \vec{I} = 0$$

Come già ripetutamente visto, questi termini rispettivamente esse rappresentano la Forza di Massa, la Forza di Superficie, il Flusso di Qdm e le Inerzie locali.

Secondo le nostre ipotesi G ed I sono nulli e quindi:

$$\vec{\Pi} + \vec{M} = 0$$

Anche qui sarebbe possibile ed utile prima visualizzare graficamente i diversi vettori e solo poi, proiettarli lungo gli assi x ; tuttavia, in questo caso, lo sviluppo è abbastanza semplice poiché ci interessa unicamente la componente della forza lungo x . (Si assume il versore dell'asse X concorde con \vec{n}_1)

Scomponiamo dunque tutti i vettori, e proiettiamo l'intera equazione lungo quest'asse, in modo da ottenerne una forma scalare:

La direzione dei vettori, e quindi i segni delle loro proiezioni non presentano problemi (sono sempre orientati come i rispettivi versori entranti \vec{n}_1 ed \vec{n}_2)

$$\Pi_{0x} + \Pi_{1x} + \Pi_{2x} + M_{1x} + M_{1x} = 0$$

Π_{0x} è la componente della forza esercitata dal fluido sulla parte interna della macchina, cosicché essa è eguale in modulo ed opposta in segno all'incognita F_x .

$$-\Pi_{0x} = F_x = \Pi_{1x} + \Pi_{2x} + M_{1x} + M_{1x}$$

Π_{1x} e Π_{2x} sono le proiezioni lungo x di $\vec{\Pi}_2$ e $\vec{\Pi}_1$ che, secondo l'ipotesi 2, sono ortogonali ad S_1 ed S_2 ; essi sono dunque gli integrali della pressione sulle due superfici, proiettati lungo x ⁵:

$$\Pi_{1x} = P_1 S_1 \quad \Pi_{2x} = P_2 S_2$$

I due termini di flusso della quantità di moto attraverso le superfici S_1 ed S_2 , \vec{M}_1 ed \vec{M}_2 sono :

$$\vec{M}_1 = \int_1 \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\vec{M}_2 = \int_2 \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

proiettando le \vec{V}_1 e \vec{V}_2 lungo le rispettive normali n_1 ed n_2 assumendo poi l'ipotesi che i coefficienti di ragguglio β della q.d.m. siano eguali ad 1 (profili di velocità piatti), si ha:

$\mathbf{M}_1 = \rho \mathbf{V}_1 |\mathbf{V}_1| \mathbf{S}_1$ (Il verso di \vec{V}_1 su S_1 e quello di \vec{n}_1 sono concordi, quindi V_n è positiva e il verso del vettore \vec{M}_1 è lo stesso della velocità \vec{V}_1 e di \vec{n}_1).

Si può anche scrivere $\mathbf{M}_1 = \rho \mathbf{V}_1^2 \mathbf{S}_1$

⁵ Per P_1 o P_2 si deve intendere a rigore il valore della pressione nel baricentro; si assume distribuzione idrostatica della pressione perché la corrente può essere ritenuta rettilinea. (ricordare la discussione del teorema di Bernoulli nella prima parte del corso.

$\mathbf{M}_2 = -\rho V_2 |\mathbf{V}_2| \mathbf{S}_2$ (Il verso di \vec{V}_2 su S_2 e quello di \vec{n}_2 sono discordi, quindi V_n è negativa e il verso del vettore \vec{M}_2 è l'opposto della velocità \vec{V}_2 e quindi concorde con \vec{n}_2 . Si può anche scrivere

$$\mathbf{M}_2 = \rho V_2^2 \mathbf{S}_2$$

Poiché abbiamo preso il versore dell'asse X concorde con \vec{n}_1 , si ha

$$\mathbf{M}_{1x} = \rho V_1^2 \mathbf{S}_1$$

$$\mathbf{M}_{2x} = -\rho V_2^2 \mathbf{S}_2$$

Restano ora da determinare i valori delle grandezze fisiche che compaiono: si assume nota la velocità in ingresso V_1 e la sezione di ingresso S_1

La velocità V_1 è legata immediatamente a V_2 dall'equazione della continuità $V_1 S_1 = V_2 S_2$

La pressione sulla superficie S_2 si può assumere ragionevolmente pari a quella ambiente

La P_1 sulla superficie S_1 va invece ricavata con un ragionamento alla Bernoulli, esposto nel paragrafo successivo. Un ordine di grandezza accettabile può essere

$$P_1 = -\rho V_1^2 / 2$$

vede

Π_{1x} è dunque dato da $-S_1 \rho V_1^2 / 2$, mentre Π_{2x} è nullo (si ricordi che si impiegano sempre pressioni relative)

Così alla fine si ottiene:

$$F_x = -\frac{1}{2} \rho V_1^2 S_1 + \rho V_1^2 S_1 - \rho V_2^2 S_2$$

Il valore ed il verso della spinta possono essere calcolati introducendo i valori numerici delle quantità che appaiono in questa equazione.

Ad esempio (aria) siano:

$$\rho = 1.2 \text{ kg / mc}; S_1 = 2.00 \text{ mq}, V_1 = 25 \text{ m / s}; S_2 = 0.5 \text{ mq e}$$

si ha:

$$V_2 = 100 \text{ m/s};$$

$$F_x = 1.2 \cdot 25^2 \cdot 2.0 - 1.2 \cdot 100^2 \cdot 0.50 - 1.2 \cdot 25^2 / 2 = -6000 \text{ N}$$

Notare il segno! *In che verso viene spinta la macchina?*

Come sempre quando si trattano gas è necessario verificare l'applicabilità dell'ipotesi di fluido incompressibile verificando che il numero di Mach $Ma = V/c$ sia $< 0,5$.

$C = 330$ per aria in condizioni standard

$C = 1400$ per acqua

Se il fluido è invece acqua:

$$\rho = 1000 \text{ kg / mc}; S_1 = 1.50 \text{ mq}, V_1 = 1 \text{ m / s}; S_2 = 0.50 \text{ mq}$$

$$V_2 = 3.00 \text{ m/s};$$

Anche in questo esercizio il teorema di Bernoulli "per fluidi perfetti" NON può essere usato per calcolare la variazione di pressione tra 1 e 2 (c'è in mezzo una macchina). Può invece essere impiegato per calcolare la prevalenza e quindi la potenza della macchina. In maniera analoga, altri esercizi possono richiedere il calcolo delle perdite di carico, e quindi l'uso del teorema di Bernoulli generalizzato. Ma il criterio con cui si impiega l'equazione globale è sempre lo stesso.

Una stima della pressione all'ingresso

Per ottenere P_1 si può applicare il teorema di Bernoulli⁶ ad un tubo di flusso che va dalla sezione S_1 ad una sezione S_a molto lontana, dove il fluido si possa immaginare fermo ($V_a = 0$).

Si ha:

$$P_1 + \rho v_1^2 / 2 = P_a + \rho v_a^2 / 2$$

ricordando ancora che stiamo usando pressioni relative e quindi:

$$P_a = 0$$

$$P_1 = -\rho v_1^2 / 2$$

Lo stesso ragionamento **non** si può applicare all'uscita, perché non è trascurabile la perdita di carico che si verifica all'immissione di un getto in una massa di fluido fermo (brusco allargamento); è più esatto ritenere che sia

$$P_1 = P_2$$

Una semplice visualizzazione della spinta del motore "a reazione"

Il ragionamento sopra illustrato è importante anche perché dimostra il meccanismo con cui funziona un motore a getto: c'è dissimmetria tra il comportamento del fluido all'esterno dalla parte dell'imbocco (le perdite di carico sono trascurabili) e dalla parte dello scarico (le pdc hanno un ruolo importante). Sempre sul funzionamento dei motori a getto (a "reazione") è utile il seguente ragionamento, tratto dal testo "idraulica" di Marone, che aiuta a comprendere, con un esempio semplice, la relazione tra spinte interne e flussi di QdM

4.3.2. Reazione di efflusso.

Si prenda a riferimento un serbatoio V, montato su ruote capaci di camminare senza attrito su rotaie R orizzontali. Sia la dimensione orizzontale del serbatoio V assai rilevante ed il serbatoio a sezione rettangolare di larghezza L normale al disegno. Nelle condizioni idrostatiche le spinte sulle pareti formano un sistema equilibrato. Si pensi ora di praticare un forellino nella parete di destra del disegno. Sotto il carico h ne effluirà la portata:

$$Q = \mu \sigma \sqrt{2gh} ; \text{ con } \mu = 0.6 ;$$

il carico h, viste le dimensioni trasversali del serbatoio e quelle assai ridotte del foro, potrà pensarsi immutabile. Si pensi di applicare l'equazione globale al caso di fig. 91a, e cioè in condizioni statiche:

$$\mathbf{G}_s + \mathbf{\Pi}_s = 0 ;$$

$$-\mathbf{\Pi}_s = \mathbf{G}_s.$$

⁶ Le ipotesi di Bernoulli non sono integralmente verificate- il ragionamento è approssimativo. E' dunque presumibile un margine di errore

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}_d - \mathbf{M}_2 - \mathbf{G}_s = -\mathbf{M}_2.$$

Così il serbatoio si muoverà sotto l'azione costante di $-\mathbf{M}_2$ con moto uniformemente accelerato. In realtà in un fenomeno d'efflusso accade che sui lembi della luce la pressione è nulla (detta pressioni residue) che, massima nel baricentro della luce γh . In conseguenza di ciò sulle pareti di destra (fig. 91c) la spinta esercitata in condizioni dinamiche dal liquido è inferiore a quella esercitata in condizioni statiche, che era pari ed opposta a quella esercitata sulla parete di sinistra, che resta invariata. In definitiva si genererà una risultante, uguale a $-\mathbf{M}_2$, pari appunto alla spinta somma vettoriale delle due spinte di verso opposto sulle pareti di sinistra e destra [rappresentata dalla parte bianca dei diagrammi delle pressioni di fig. 91c] dovute ai diagrammi delle pressioni disegnate.

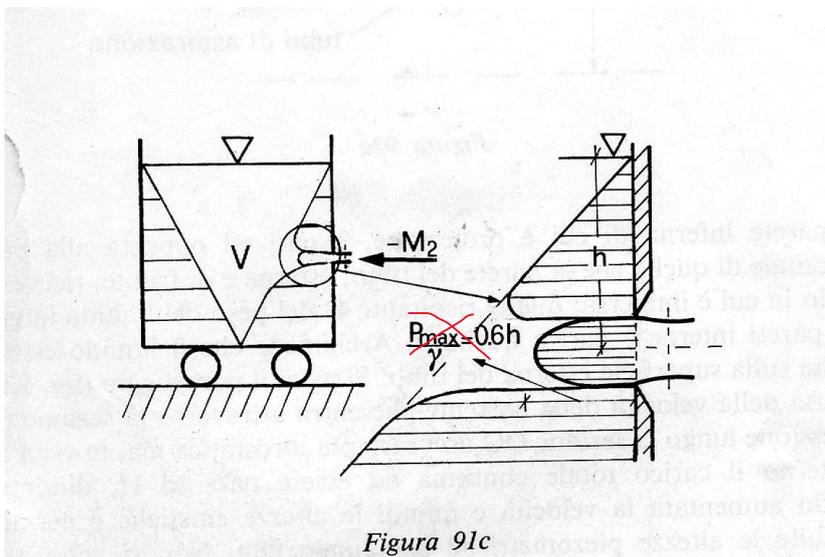


Figura 91c

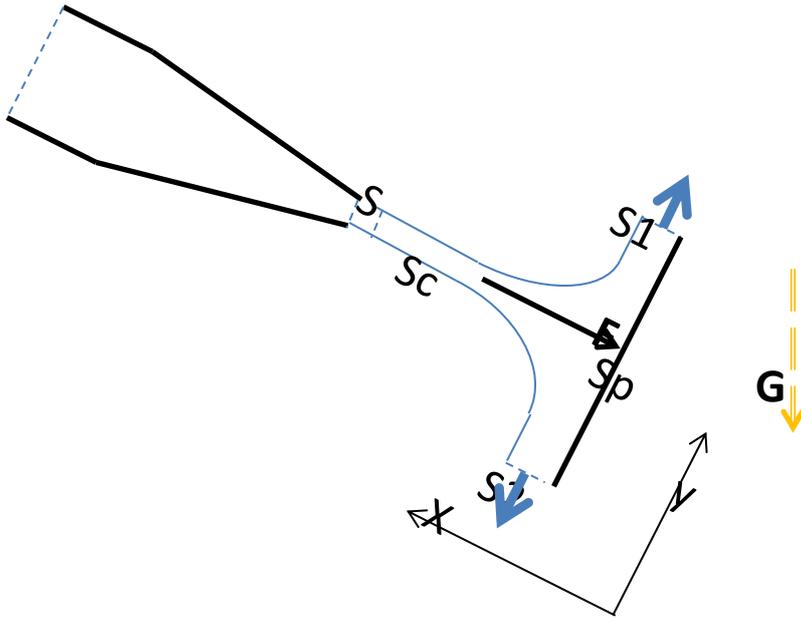
(ovviamente le \mathbf{G} , componenti del peso lungo l'asse s orizzontale sono $=0$)

Applicazioni dell'equazione globale a volumi di controllo in parte esposti all'aria

In molti casi il volume di controllo da considerare presenta delle superfici in contatto con l'atmosfera, il che rende più difficile la definizione del volume stesso; in compenso il calcolo delle spinte su queste superfici è particolarmente semplice: essendo esposte all'ambiente esterno, ed adottando anche qui la convenzione di considerare pressioni relative (cioè la differenza tra pressione assoluta e pressione ambiente), la pressione e quindi la spinta risultano nulle.

Spinta su parete piana

Un getto di fluido investe perpendicolarmente una lastra piana, orientata in maniera arbitraria. Il getto viene deviato e si allontana in direzione parallela alla lastra. Si chiede la spinta che il fluido esercita; si assume l'ipotesi di fluido perfetto.



In molti esercizi di questo tipo, occorre svolgere dei calcoli preliminari: per esempio potrebbe essere data la pressione nel tubo a monte del raccordo conico e la pressione di sbocco (ambiente) nonché il coefficiente di contrazione C_c (con valori che possono variare tra 1 e 0.6) la velocità nella sezione contratta si calcola facilmente. In questo caso supponiamo nota tutta la geometria e la velocità V_c nella sezione contratta.

Il volume di controllo è definito dalle seguenti superfici:

la sezione contratta S_c ;

le due sezioni di uscita S_1 ed S_2 ;

la superficie di contatto con la piastra S_p ;

la superficie esterna S_o , che rappresenta il contatto tra la massa di fluido e l'atmosfera (non è visibile nella figura, bisogna fare uno sforzo per immaginarla; notare inoltre che questa superficie è la parete di un tubo di flusso, poiché non ci sono componenti di velocità perpendicolari ad essa

Fatto ciò, si applica l'equazione globale, notando immediatamente che non ci sono flussi di q.d.m attraverso la superficie S_p (impermeabile), e S_o (superficie di tubo di flusso).

$$-\vec{\Pi}_{S_p} = \vec{F} = \vec{G} + \vec{\Pi}_{S_c} + \vec{\Pi}_{S_1} + \vec{\Pi}_{S_2} + \vec{\Pi}_{S_o} + \vec{M}_{S_c} + \vec{M}_{S_1} + \vec{M}_{S_2}$$

Si vede subito che $\vec{\Pi}_{S_o}$ è nulla perché è a contatto con l'atmosfera. $\vec{\Pi}_{S_c}$, $\vec{\Pi}_{S_1}$ e $\vec{\Pi}_{S_2}$ sono egualmente nulle perché il loro contorno è a contatto con l'atmosfera, e la pressione varia in maniera idrostatica lungo le sezioni trasversali^{7 8}, Dunque:

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{M}_{S_c} + \vec{M}_{S_1} + \vec{M}_{S_2}$$

A questo punto si può proiettare sulla perpendicolare alla piastra, che indichiamo con x .

Considerando le direzioni delle velocità di uscita, si nota che $M_{S_1,x}$ e $M_{S_2,x}$ sono nulle. Dunque

$$Fx = Gx + M_{xS_c}$$

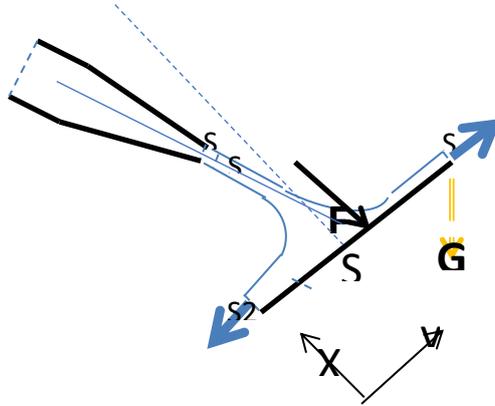
Se la forza peso è trascurabile, e con le solite ipotesi sul coefficiente di ragguglio β , si ha:

⁷ In realtà c'è contraddizione tra la variazione idrostatica e la costanza della pressione sul bordo esterno. Si risolve andando all'origine della teoria sulla variazione idrostatica della pressione in una sezione trasversale alla corrente

⁸ E' bene notare, in questo esempio come i successivi relativi a getti in parte esposti all'atmosfera, che l'ipotesi di distribuzione idrostatica delle pressioni in una sezione è valida solo se la curvatura è piccola, come nelle sezioni di ingresso e uscita. Quando le traiettorie sono curve, l'andamento è ben lontano dall'essere idrostatico. La pressione esercitata dalla superficie della piastra sul fluido può essere interpretata come forza centripeta (e quindi la sua reazione, che è l'azione della piastra sul fluido è la forza centrifuga).

$$F_x = \rho S_c V_c^2 \quad \text{ovvero} \quad F_x = \rho q V_c$$

Lo stesso problema per una lastra piana che faccia un angolo generico col getto si tratta esattamente nello stesso modo, tranne che la proiezione dell'equazione globale va fatta lungo la perpendicolare alla piastra e non lungo l'orizzontale o la verticale e nemmeno nella direzione del getto.



Proiettare l'equazione lungo la direzione X perpendicolare alla piastra.

$$F_x = G_x + M_{xSc}$$

$$\rho S_c V_c^2 \quad \bar{n}$$

$$F_x = \rho S_c V_c^2 \cos\theta \quad \text{ovvero} \quad F_x = \rho q V_c \cos\theta$$

Spinta su parete curva

Sono assegnati: U_1 , S_1 e l'angolo θ

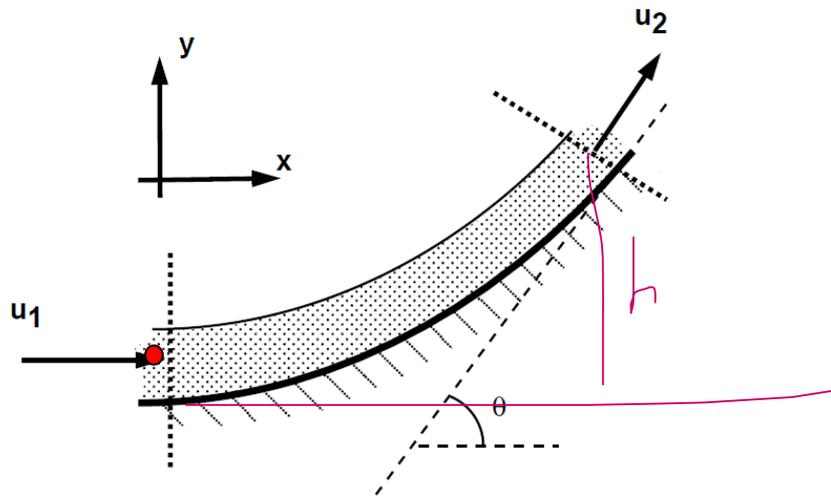
Note U_1 e la differenza di quota tra le sezioni di ingresso e di uscita è facile calcolare U_2 con Bernoulli. costanti. In particolare nelle sezioni trasversali, dove la curvatura è nulla, la pressione è costante, o quasi costante e quindi, se la differenza di quota è trascurabile, si ha $U_1 = U_2$

La sezione di uscita è data dall'equazione di continuità $U_1 S_1 = U_2 S_2$ quindi nelle ipotesi poste si ha per continuità $S_1 = S_2$

Si può assumere dunque che sezione e le velocità (in modulo) all'interno del volume di controllo restino costanti. Si trascura inoltre il peso del fluido

Sia q la portata $q = U_1 S_1 = U_2 S_2$ ⁹

⁹ E' spesso utile indicare i termini del tipo $U_1^2 S_1$ come $U_1 q$, essendo $q = U_1 S_1 = U_2 S_2$



(da www.efm.leeds.ac.uk/CIVE/FluidLevel1 Lecture 8 169)

Per il resto, si svolge tutto come visto negli altri casi: è anzi più semplice perché la sezione di uscita è una sola. Applicando l'equazione globale dell'idrodinamica al volume tratteggiato V:

Ricordando, come prima, che l'azione $\vec{\pi}_0$ delle pressioni sulla superficie esposta all'aria è pari a 0 ed anche \vec{M}_0 è nullo come è ovvio:

$$\vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_p + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

$$-\vec{\Pi}_p = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$-\vec{\Pi}_p$ è proprio la forza esercitata sulla piastra.

$\vec{\Pi}_1$ è nullo (le pressioni sono tutte pari a 0, perché il punto ● è in contatto con l'atmosfera, e l'effetto idrostatico è trascurabile; per lo stesso motivo anche $\vec{\Pi}_2$ è nullo. Dunque:

$$-\vec{\Pi}_p = +\vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$$\vec{M}_1 \text{ è dato da } \int \rho \vec{u}_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 dS := \int \rho \vec{u}_1 u_n dS^{10}$$

Questo perché \vec{u}_1 è orientato come \vec{n}_1 , u_n è eguale al modulo di u_1 , ed ha segno positivo; il vettore è dunque di verso concorde a \vec{n}_1 ed a \vec{u}_1 , cioè verso l'interno del volume di controllo. Si ha dunque

$$\vec{M}_1 = \rho u_1^2 \vec{n}_1 S_1$$

(con la solita ipotesi che il coefficiente di ragguglio β sia pari a 1)

$$\vec{M}_2 \text{ è dato da } \int \rho \vec{u}_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = \int \rho \vec{u}_2 u_n dS$$

\vec{u}_2 è orientato in verso opposto a \vec{n}_2 , u_n è dunque eguale al modulo di u_2 , ma col segno negativo. Il vettore \vec{M}_2 è dunque orientato in verso opposto a \vec{u}_2 e cioè concorde a \vec{n}_2 , verso l'interno del volume di controllo

¹⁰ E' il solito ragionamento più volte ripetuto. I simboli sono leggermente variati.

Si ha quindi $\vec{M}_2 = \rho u_2^2 \vec{n}_2 S_1$ (ancora $\beta = 1$)

Proiettando ora lungo x (asse orizzontale)

$$-\Pi_{px} = \mathbf{M}_{1x} + \mathbf{M}_{2x}$$

\mathbf{M}_{1x} è il modulo di \vec{M}_1 ; $\mathbf{M}_{1x} = \rho U_1^2 S_1$ ed ha il segno positivo perché è concorde col versore dell'asse x prescelto

\mathbf{M}_{2x} vale $\rho U_2^2 S_2 \cos\theta$ e ha il segno negativo perché discorde rispetto all'asse x prescelto.

Dunque

$$-\Pi_{px} = \rho U_1^2 S_1 - \rho U_2^2 S_2 = \rho q U_1 - \rho q U_2 \cos\theta$$

Proiettando invece lungo y (asse verticale)

$$-\Pi_{py} = \mathbf{M}_{1y} + \mathbf{M}_{2y}$$

Il segno meno perché orientate in verso opposto all'asse y;

$\mathbf{M}_{1y} = 0$ (ovviamente)

\mathbf{M}_{2y} vale $-\rho U_2^2 S_2 \sin\theta$ ed ha il segno negativo perché ha verso opposto al versore dell'asse x prescelto

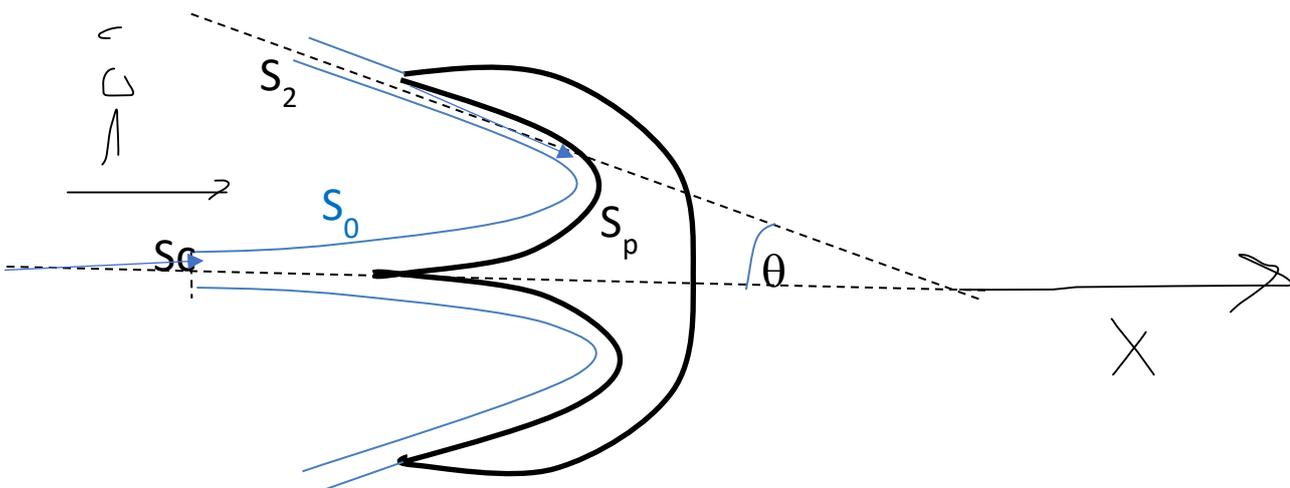
Dunque ancora

$$-\Pi_{oy} = -\rho U_2^2 S_2 \sin\theta = -\rho q U_2 \sin\theta$$

Con semplici considerazioni trigonometriche si può ottenere il modulo e la direzione del vettore $-\vec{\Pi}_0$

Turbina Pelton

Un getto in atmosfera con velocità V_c impatta su un manufatto che lo divide in due pari simmetriche e lo devia di $180^\circ - \theta$. Si cerca la spinta idrodinamica esercitata sul manufatto



Poiché la geometria è simmetrica, conviene dividere il problema in due parti simmetriche e calcolarne una sola: si ha dunque un getto con portata $V_c S_c/2$. Successivamente si moltiplica il risultato per 2.

Si può assumere che sezione e le velocità (in modulo) nelle sezioni di ingresso ed uscita (1 e 2) sono eguali per il teorema di Bernoulli: la pressione nelle due sezioni è costante, e la differenza di livello è piccola.

$$F_x = S_1 \rho V^2 + S_1 \rho V^2 \cos\theta = S_1 (\rho V^2 + \rho V^2 \cos\theta)$$

Svolgendo i calcoli si trova che la spinta è nella direzione del getto e vale: $\rho S c (1 + \cos(\theta)) V_c^2$ (risultato già moltiplicato per 2)

Trovare il valore di θ per cui la spinta è massima (... ovviamente...)

Rifare il calcolo assumendo che la piastra si muova nella direzione di V , con velocità periferica U .

Trovare l'espressione della spinta e della potenza. $W = F_x \cdot U$

Questo schema è alla base del funzionamento della turbina Pelton, illustrata all'inizio del blocco e nelle figure seguenti.



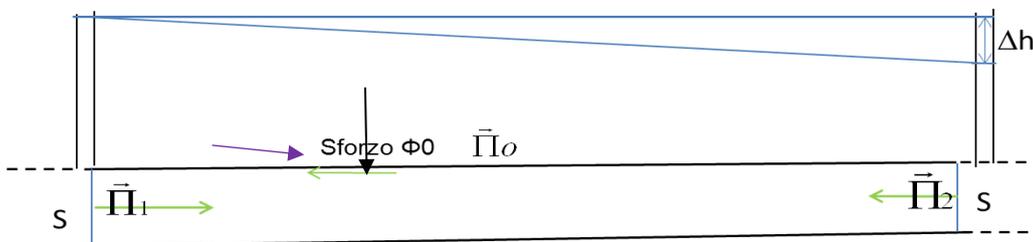
Si vede la sagomatura interna della piastra (pala). Le pale si susseguono con la rotazione

Altre informazioni su:

http://it.wikipedia.org/wiki/Turbina_Pelton

Lo sforzo di trascinamento

Consideriamo la figura seguente che rappresenta una tubazione cilindrica, orizzontale¹¹ di sezione S , lunghezza L , percorsa da una corrente in moto uniforme¹² con velocità media V . Le ipotesi sono le solite, ma questa volta non si assume che il fluido sia "perfetto"; esiste dunque una perdita di carico Δh , evidenziata nel disegno con i due piezometri. Le due pressioni p_1 e p_2 sono dunque diverse ed è: $p_2 = p_1 + \Delta h \gamma$



Applicando l'equazione globale al volume di controllo, che ormai dovrebbe essere facile identificare (compreso tra le sezioni di ingresso 1 e di uscita 2 e la superficie laterale 0) e proiettando lungo l'asse orizzontale x , orientato nel verso della velocità:

$$-\Pi_{0x} = \Pi_{1x} + \Pi_{2x} + M_{1x} + M_{2x}$$

Si vede facilmente che $M_{1x} = -M_{2x}$. Resta dunque¹³

$$-\Pi_{0x} = \Pi_{1x} + \Pi_{2x} \quad \text{e dunque} \quad -\Pi_{0x} = p_1 S - p_2 S$$

La tubazione dunque esercita sul fluido una forza in direzione opposta alla corrente, il cui modulo è:

$$\Pi_{0x} = S \Delta p$$

Questa forza deriva dall'azione degli sforzi tangenziali che si esercitano sulla superficie esterna del fluido, nella direzione della freccia sottile verde (quindi sul tubo gli sforzi tangenziali hanno verso opposto).

¹¹ Come spesso, assumiamo la condotta orizzontale solo per semplificare i ragionamenti e le elaborazioni; le conclusioni sono valide in via generale, a patto di considerare le quote piezometriche anziché le pressioni. Se si tratta poi di un gas, non c'è neanche bisogno di questa precisazione.

¹² "Uniforme" vuol dire che tutte le grandezze – tranne eventualmente la pressione – restano costanti lungo l'asse del moto x : $\partial/\partial x = 0$

¹³ Eventuali sforzi tangenziali sulle superfici di ingresso e di uscita avrebbero componenti nulle lungo l'asse x . **Ma in ogni caso tali sforzi sono nulli, perché non ci sono componenti di velocità tangenziali alle superfici, e dunque, dalla legge di Stokes...**

(La parte di $\vec{\Pi}_0$, dovuta alla pressione è normale alla parete, e quindi non ha effetto lungo l'asse x.)

L'origine di questi sforzi è la viscosità.

E' importante trovare la relazione tra lo sforzo tangenziale alla parete ("sforzo di trascinamento" diretto lungo x) Φ_0 e Δp .

Il moto è uniforme, c'è simmetria centrale, quindi Φ_0 è costante su tutta la superficie cilindrica $P L$, dove P è il perimetro. Dunque

$$\Phi_0 L P = \Delta p S \quad \text{e quindi} \quad \Phi_0 = \Delta p / L \quad S/P \quad *$$

o anche, ricordando che $\Delta p = \gamma \Delta h$ (essendo h la quota piezometrica)

$$\Phi_0 = \gamma \Delta h / L \quad S/P \quad \rightarrow \quad \Phi_0 = \gamma J \quad S/P \quad **$$

Questi risultati sono molto importanti: legano lo sforzo tangenziale Φ_0 alla parete con la perdita di carico Δp e quindi con la cadente piezometrica $J = \Delta h / L$.

*

Se la sezione non è circolare, la trattazione è analoga; l'unica differenza è che occorre considerare lo sforzo tangenziale medio Φ_m anziché assumere il valore costante Φ_0

$$\Phi_m L P = \Delta p S \quad \text{e quindi} \quad \Phi_m = \Delta p / L \quad S/P$$

Anche qui introduciamo $\Delta p = \gamma \Delta h$

$$\Phi_m = \gamma \Delta h / L \quad S/P$$

Absolutamente analoghe alle precedenti

A questo punto conviene introdurre il concetto di "raggio idraulico" R_i , rapporto tra sezione S e perimetro bagnato P :

$$R_i = S/P.$$

E quindi si può scrivere:

$$\Phi_m = \Delta p / L \quad R_i ; \quad * \quad \text{bis}$$

$$\Phi_m = \gamma \Delta h / L \quad R_i ; \quad \Phi_m = \gamma J \quad R_i \quad ** \quad \text{bis}$$

Calcolare per esercizio il raggio idraulico di una sezione circolare

Si ha $R_i = R/2 = D/4$

Relazioni utili si ottengono introducendo nella ** e nella ** bis le espressioni note per la perdita di carico J .

Per farlo è opportuno generalizzare la formula di Darcy Weissbach alle sezioni non circolari. Si ottiene sostituendo

$$J = \lambda V^2 / (8gR_i),$$

si ha dunque

$$\Phi_m = J \gamma R_i = \gamma R_i \lambda V^2 / (8gR_i) = \lambda \rho V^2 / 8 \quad ***$$

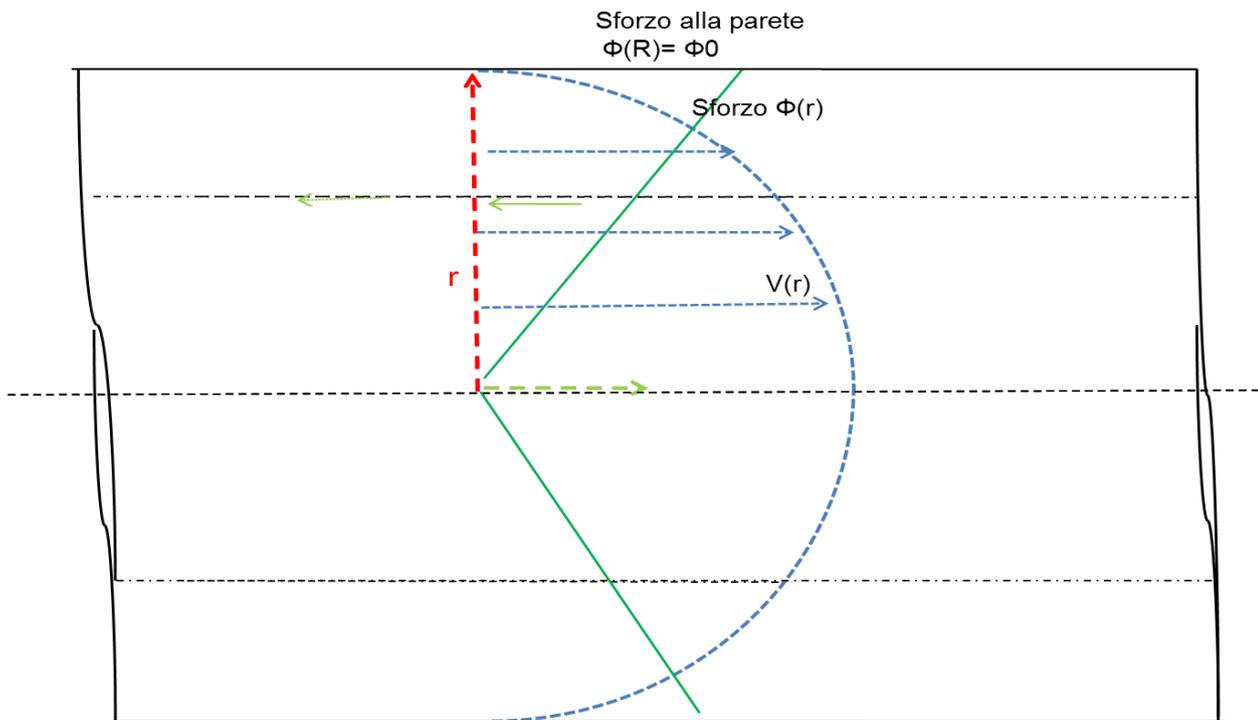
L'espressione *** che fornisce lo sforzo alla parete, nota la velocità, è generale.

Elaborando ulteriormente al caso della sezione circolare di raggio R, si ha anche ¹⁴

$$\Phi_0 = \Delta p / L \cdot R / 2 ; \quad \Phi_0 = \gamma \Delta h / L \cdot R / 2 ; \quad \Phi_0 = \gamma J R / 2$$

Lo sforzo interno

Si ripeta identica l'applicazione dell'equazione globale, come nel paragrafo precedente, con una sola differenza: il volume di controllo non è più il cilindro che occupa tutta la tubazione, ma un volume, egualmente cilindrico, di diametro r



Ripetendo gli stessi ragionamenti di prima, si ottiene:

$$\Phi(r) = \Delta p / L \cdot r / 2 = J \gamma r / 2 \quad ***$$

Dove $\Phi(r)$ è lo sforzo tangenziale esercitato dal fluido a distanza r dal centro nella direzione e nel verso della freccia sottile. L'andamento dello sforzo è dunque lineare, (linea verde continua) vale 0 al centro e Φ_0 alla parete secondo quanto illustrato nella figura, con la linea continua verde. Si ritrova quindi come caso particolare il caso del paragrafo precedente. Questa conclusione è generale, vale quale che sia la natura dello sforzo: Newtoniano, o no; viscoso o altro.

Il profilo di velocità nel moto viscoso (Poiseuille)

Alle conclusioni del precedente paragrafo, aggiungiamo un'ulteriore ipotesi: che cioè lo sforzo tangenziale sia puramente viscoso e Newtoniano (legge di Stokes) : che cioè, nei simboli adottati finora,

$$\Phi(r) = -\mu \partial V_x / \partial r \quad ****$$

Mettendo assieme la *** e la **, si ottiene

$$\mu dV_x / dr = J \gamma r / 2$$

(il segno di derivata parziale è superfluo, visto che l'unica variabile è il raggio r). Quindi

$$dV_x / dr = J \gamma r / (2 \mu) \quad *****$$

¹⁴ Non è necessario memorizzare tutte le formule: conviene conoscere quelle in grassetto e sapere ricavare la altre

Questa equazione differenziale, lineare del primo ordine è facilmente integrabile, pur che sia nota la condizione al contorno; nel caso specifico il valore della velocità per $r=0$, cioè alla parete¹⁵.

La velocità in corrispondenza della parete è sempre 0, Questo è un principio fondamentale in regime viscoso. L'integrazione della ***** è semplice: è facile verificare che la soluzione è un polinomio di secondo grado, simmetrico rispetto all'asse del tubo, e che vale 0 sulla parete (illustrato nella figura precedente con una linea tratteggiata. Il profilo della velocità $V(r)$ è dunque un paraboloide, il cui integrale è ovviamente pari alla portata Q . Va anche notato che la pendenza della curva $V(r)$ rappresenta, a meno della viscosità μ , lo sforzo $\Phi(r)$; in particolare, la pendenza in corrispondenza della superficie solida da' lo sforzo alla parete Φ_0 .

Mettendo insieme questi risultati - attraverso **derivazioni facili ma poco interessanti** (non fanno parte del programma d'esame) si ottiene il legame tra perdita di carico e portata: e da questa, introducendo l'espressione di Darcy-Weisbach

$$\Delta h = \lambda V^2 / (2 g D)$$

$$\lambda = 64/Re$$

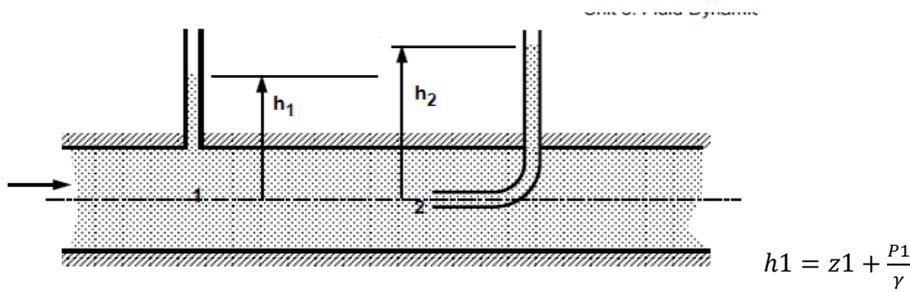
Che è la parte sinistra dell'abaco di Moody, relativa al regime viscoso, e che vale per Re minori di 2000-3000

Questa relazione invece va memorizzata; e a partire da questa bisogna saper svolgere le applicazioni

¹⁵ Il valore della velocità del fluido immediatamente adiacente ad una superficie solida ferma è sempre 0. La cosa si può comprendere riflettendo sulla legge della viscosità: lo sforzo viscoso dipende dalla variazione della velocità con la distanza. Alla parete non ci può essere un salto della velocità.

Tubo di Pitot

E' un semplice strumento per la misura della velocità in una corrente fluida.



(Andrew Sleigh & Cath Noakes, Università di Leeds) www.efm.leeds.ac.uk/CIVE/FluidLevel1 Lecture 8 131

Con riferimento alla figura:

il punto 1 è sufficientemente lontano dalla "presa di pressione dinamica" 2, in maniera da non disturbare sensibilmente il flusso; si applica Bernoulli tra 1 e 2, e si assume che la velocità in 2 sia nulla.

Una semplice relazione collega la quota piezometrica in 1, h_1 con quella in 2, h_2 ; poiché la V_2 è nulla, è facile ricavare la formula che dà V_1 in funzione della differenza $h_2 - h_1$.

$$z1 + \frac{P1}{\gamma} + V1^2 / 2g = z2 + \frac{P2}{\gamma} + V2^2 / 2g$$

$$h1 + V1^2 / 2g = h2$$

$$\frac{V1^2}{2g} = h2 - h1$$

Ricordare la condizione per cui la quota piezometrica in una sezione si può considerare idrostatica

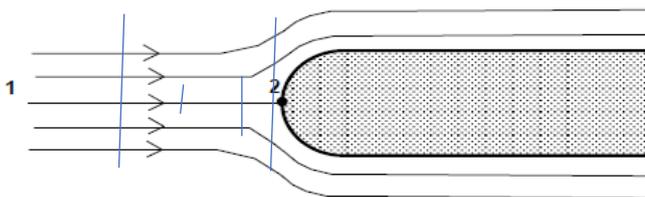
Eseguire i calcoli sia per un liquido, sia per un gas (in questo caso, trascurare l'effetto della differenza di livello; e ricordarsi di verificare il n. di Mach)

$$\rho g z1 + \frac{P1}{\gamma} + \frac{\rho V1^2}{2} = \rho g z2 + \frac{P2}{\gamma} + \frac{\rho V2^2}{2}$$

$$\frac{P1}{\gamma} + \frac{\rho V1^2}{2} = \frac{P2}{\gamma} + \frac{\rho V2^2}{2}$$

$$\frac{P2 - P1}{\gamma} = \frac{\rho V1^2}{2}$$

La realizzazione pratica del tubo di Pitot può essere sensibilmente diversa da quella schematizzata sopra: spesso è costituito da una sonda, come in figura, in cui la presa di pressione dinamica è nel punto 2,

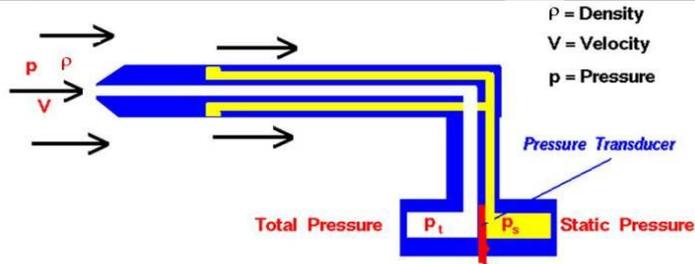


mentre quella statica può essere sul lato della stessa sonda, oppure nelle vicinanze, come nelle figure seguenti.



Pitot-Static Tube Prandtl Tube

Glenn
Research
Center



Bernoulli's Equation: Measure difference in total and static pressure

static pressure + dynamic pressure = total pressure

$$(p_s + \rho \times \frac{V^2}{2}) = p_t$$

Solve for Velocity: $V^2 = \frac{2(p_t - p_s)}{\rho}$



1 le frecce indicano le prese dinamiche, il cerchio la presa statica



2 Presa statica

P_s : pressione statica P_d pressione dinamica

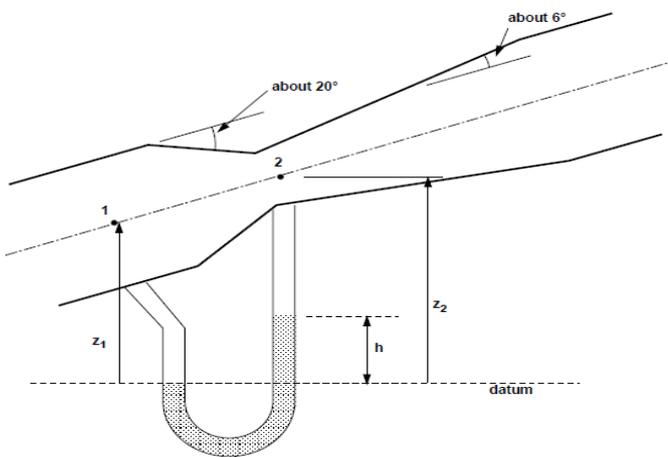
$$P_s = 0,5 \cdot 10^5 \quad P_d = 0,6 \cdot 10^5 \quad V?$$

$$\rho = 0.7$$

$$\rho v^2 / 2 = P_d - P_s = 1 \cdot 10^4 ; \quad v^2 = 2 / \rho \cdot 10^4 \quad V = \text{circa } 130$$

Tubo di Venturi

Anche questo esempio é una applicazione del teorema di Bernoulli, in questo caso ad una corrente.



(Andrew Sleight & Cath Noakes, Università di Leeds) www.efm.leeds.ac.uk/CIVE/FluidLevel1

Si applica il teorema di Bernoulli tra la sezione 1 e la 2.

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 = Q$$

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = h_2 - h_1$$

$$\frac{V_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)}{2g} = h_2 - h_1$$

Trovare la relazione tra la quota piezometrica in 1 ed in 2 assumendo peso specifico dell'acqua = 9800 N/m³ e peso specifico del liquido manometrico = 13000 N/m³

Trovare il legame tra l'h della figura (dislivello del manometro differenziale) e la portata Q

Verificare il caso particolare in cui l'apparecchio è orizzontale; com'è il legame tra p₁ e p₂? Quale è più grande?
 Ricavare il valore p₂ in funzione della portata Q

Il principale e più classico uso del venturimetro è la misura delle portate, ma le sue applicazioni sono numerosissime. Ad esempio, come sistema di aspirazione: la pressione nel punto 2, come si è visto svolgendo gli esercizi qui sopra, può essere abbassata fino a quasi il suo limite fisico (qual è?) Collegando quindi una tubazione alla sezione 2, e collegandola per esempio con un serbatoio di un altro fluido, ottiene di mescolare i due fluidi. La realizzazione pratica può essere diversa

Molte informazioni, ed una lista di applicazioni dell'effetto Venturi si trovano su:

http://en.wikipedia.org/wiki/Venturi_effect

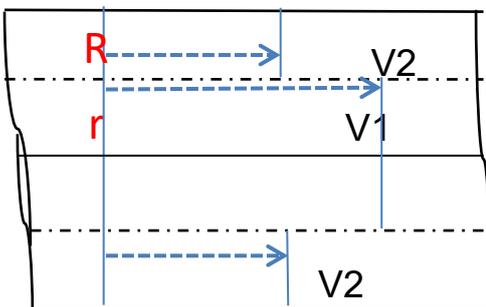
Un richiamo ed un esempio dei coefficienti di Coriolis

$$\alpha = \frac{\int V^3 dS}{S \cdot V_m^3} \quad \beta = \frac{\int V^2 dS}{S \cdot V_m^2}$$

Per ricordare perché nel primo coefficiente (α) la velocità compare al cubo anzi che al quadrato occorre ricordare la dimostrazione del teorema di Bernoulli esteso alle correnti.

Per familiarizzarsi col senso fisico dei due coefficienti è utile calcolare il loro valore nel caso schematico che segue.

Immaginiamo una corrente uniforme a sezione circolare; il profilo di velocità è diviso in due parti: nella parte centrale, con raggio r la velocità è costante e vale V_1 , nell'anello esterno, compreso tra i diametri r e R, velocità pure costante è V_2 .¹⁶



Si ha dunque

¹⁶ Un tale profilo è del tutto irrealistico, e serve solo per semplificare il ragionamento

$$\beta = \frac{\int V^2 dS}{S \cdot V_m^2} = \frac{\int_{S_1} V_1^2 dS + \int_{S_2} V_2^2 dS}{(S_1 + S_2) V_m^2} = \frac{V_1^2 S_1 + V_2^2 S_2}{(S_1 + S_2) \cdot V_m^2}$$

Ovviamente si ha: $(S_1 + S_2) = \pi R^2$ $S_1 = \pi r^2$ $S_2 = \pi (R^2 - r^2)$

Inoltre:
$$V_m = \frac{V_1 S_1 + V_2 S_2}{(S_1 + S_2)}$$

Assumendo ad esempio $V_2=0.5$, $V_1=1$, $R=1.5$ e $r=1$, svolgendo i calcoli si ha

$\beta = 1.12$

Analogamente

$$\alpha = \frac{\int V^3 dS}{S \cdot V_m^3} = \frac{\int_{S_1} V_1^3 dS + \int_{S_2} V_2^3 dS}{(S_1 + S_2) V_m^3} = \frac{V_1^3 S_1 + V_2^3 S_2}{(S_1 + S_2) \cdot V_m^3}$$

E con gli stessi valori per V_2 , V_1 , R , r si ha

$\alpha = 1.408$

Si puo' provare a rifare i calcoli variando V_2 e V_1 , e si vedrà che i due indici sono una misura della variabilità del profilo di velocità: ad esempio se $V_2=V_1$ (profilo uniforme), si ha: $\alpha = \beta = 1$