

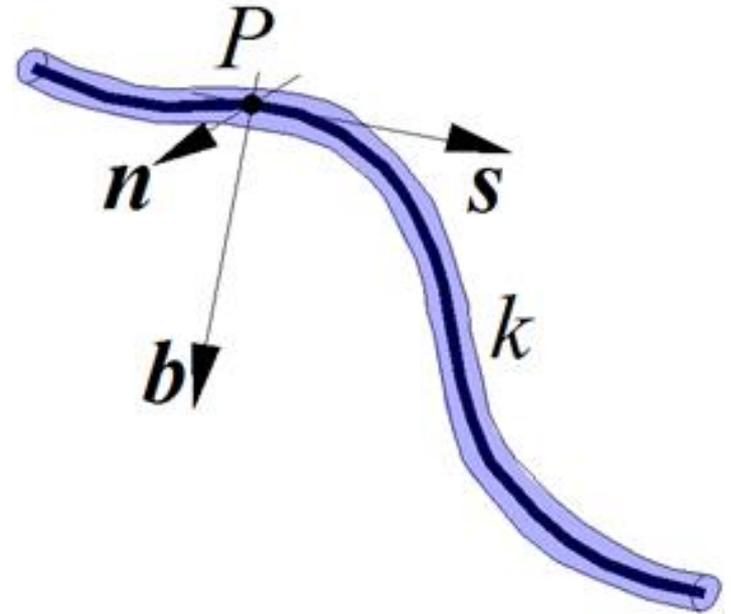
Teorema di Bernoulli

The Bernoulli principle

$$\underline{\nabla} p = \left\{ \frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial n}, \frac{\partial p}{\partial b} \right\}$$

$$\underline{g} = \{g_s, g_n, g_b\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial s}, \frac{\partial U}{\partial n}, \frac{\partial U}{\partial b} \right\}$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \{a_s, a_n, a_b\} = \left\{ \frac{du}{dt}, \frac{u^2}{r}, 0 \right\}$$



La componente a_b dell'accelerazione lungo la binormale è nulla giacché il vettore $\frac{d\underline{u}}{dt}$ è contenuto nel piano osculatore s - n . Inoltre, poiché \underline{g} è un campo centrale, risulta conservativo e pertanto munito di potenziale scalare U . Nello specifico, $U = -gz$.

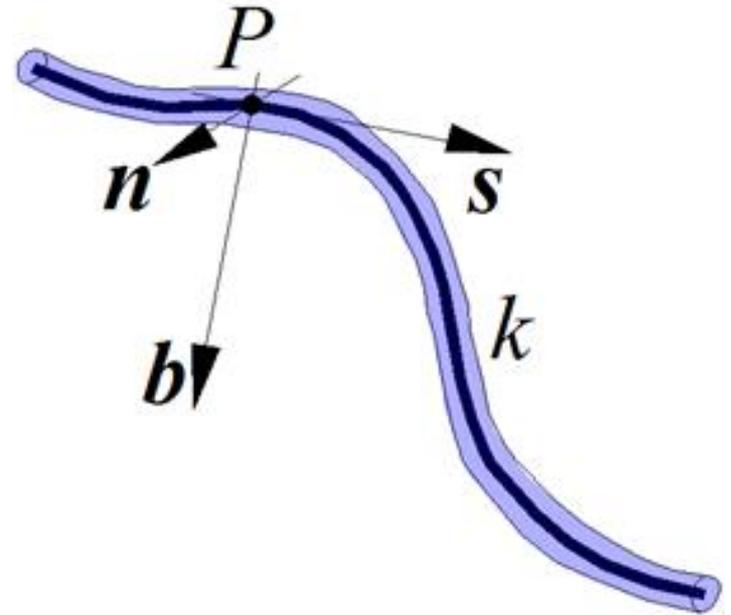
Teorema di Bernoulli

The Bernoulli principle

$$\underline{\nabla} p = \left\{ \frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial n}, \frac{\partial p}{\partial b} \right\}$$

$$\underline{g} = \{g_s, g_n, g_b\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial s}, \frac{\partial U}{\partial n}, \frac{\partial U}{\partial b} \right\}$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \{a_s, a_n, a_b\} = \left\{ \frac{du}{dt}, \frac{u^2}{r}, 0 \right\}$$



Sviluppando ulteriormente la componente a_s dell'accelerazione lungo la tangente e ricordando la regola di derivazione Euleriana risulta:

$$a_s = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right)$$

In cui è stato eliminato il termine locale dell'accelerazione per l'ipotesi introdotta di moto stazionario.

Teorema di Bernoulli

The Bernoulli principle

$$\underline{\nabla} p = \left\{ \frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial n}, \frac{\partial p}{\partial b} \right\}$$

$$\underline{g} = \{g_s, g_n, g_b\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial s}, \frac{\partial U}{\partial n}, \frac{\partial U}{\partial b} \right\}$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \left\{ \frac{du}{dt}, \frac{u^2}{r}, 0 \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right), \frac{u^2}{r}, 0 \right\}$$

Proiettando dunque l'equazione vettoriale

$$\underline{\nabla} p = \rho \left(\underline{g} - \frac{d\underline{u}}{dt} \right)$$

risulta:

Proiezione lungo s:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \rho \left[\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]$$

Proiezione lungo n:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{u^2}{r} \right)$$

Proiezione lungo b:

$$\frac{\partial p}{\partial b} = \rho \frac{\partial U}{\partial b}$$

Teorema di Bernoulli

The Bernoulli principle

Introducendo l'ipotesi di liquido incomprimibile, è possibile portare la densità all'interno delle derivate spaziali. In aggiunta, ipotizzando il filetto sensibilmente rettilineo localmente ($r \rightarrow \infty$), è possibile trascurare l'accelerazione centripeta, giacché $\frac{u^2}{r} \rightarrow 0$.

Proiez. s: $\frac{\partial p}{\partial s} = \rho \left[\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\rho g z + p + \rho \frac{u^2}{2} \right) = 0$

Proiez. n: $\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{u^2}{r} \right) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial n} (\rho g z + p) = 0$

Proiez. b: $\frac{\partial p}{\partial b} = \rho \frac{\partial U}{\partial b} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial b} (\rho g z + p) = 0$

Teorema di Bernoulli

The Bernoulli principle

Dividendo tutto per il peso specifico $\gamma = \rho g$ si ottiene il seguente set di equazioni:

Proiez. s: $\frac{\partial}{\partial s} \left(\rho g z + p + \rho \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = H,$
costante lungo l'ascissa
curvilinea s

Proiez. n: $\frac{\partial}{\partial n} (\rho g z + p) = 0 \quad \longrightarrow \quad z + \frac{p}{\gamma} = h(s),$
costante lungo la
normale n

Proiez. b: $\frac{\partial}{\partial b} (\rho g z + p) = 0 \quad \longrightarrow \quad z + \frac{p}{\gamma} = h(s),$
costante lungo la
binormale b

Teorema di Bernoulli

The Bernoulli principle

L'equazione risultante secondo l'ascissa curvilinea s

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = H$$

indica che l'**energia specifica** o **carico totale** H , somma della quota geometrica z , dell'altezza piezometrica $\frac{p}{\gamma}$ e del termine cinetico $\frac{u^2}{2g}$ è costante lungo l'ascissa curvilinea s solidale alla traiettoria k .

I tre addendi hanno le dimensioni di una lunghezza (Energie per unità di peso).

Il termine $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$ è noto come *trinomio di Bernoulli*. L'eq. esprime il teorema di Bernoulli: lungo la traiettoria di un liquido ideale, pesante, incompressibile, in regime di moto stazionario, il *carico totale* H è costante.

Teorema di Bernoulli

The Bernoulli principle

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = H$$

La costanza sopra espressa è riferita **alla singola traiettoria**, potendo invece il carico variare, anche significativamente, su traiettoria anche vicine a quella considerata.

Le equazioni:

$$z + \frac{p}{\gamma} = h(s),$$

lungo la normale n

$$z + \frac{p}{\gamma} = h(s),$$

lungo la binormale b

esprimono la costanza all'ascissa s , della quota piezometrica « $h(s)$ » rispetto gli assi n e b rispettivamente. In realtà per l'asse binormale è rigorosamente vero mentre lungo l'asse normale è una posizione accettabile nel caso in cui la traiettoria risulti **localmente** sensibilmente rettilineo.

Teorema di Bernoulli

The Bernoulli principle

$$z + \frac{p}{\gamma} = h(s),$$

lungo la normale n

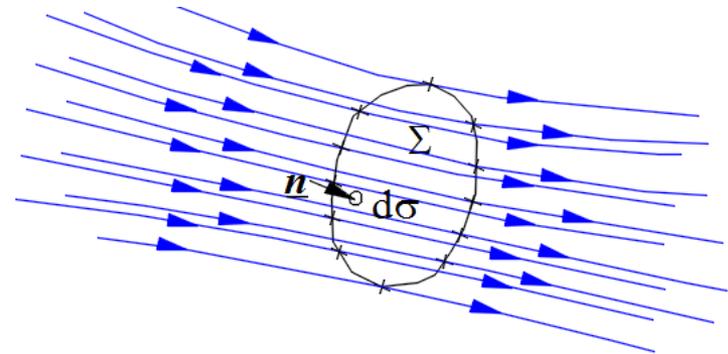
$$z + \frac{p}{\gamma} = h(s),$$

lungo la binormale b

La costanza della quota piezometrica lungo i due assi n e b implica l'invariabilità di essa su tutta la sezione trasversale infinitesima $d\sigma$ e contenuta nel piano n - b e centrata sul punto $P \in k$ del filetto elementare.



Per un fascio di filetti localmente rettilinei e paralleli, la quota piezometrica è costante sull'intera sezione trasversale piana.

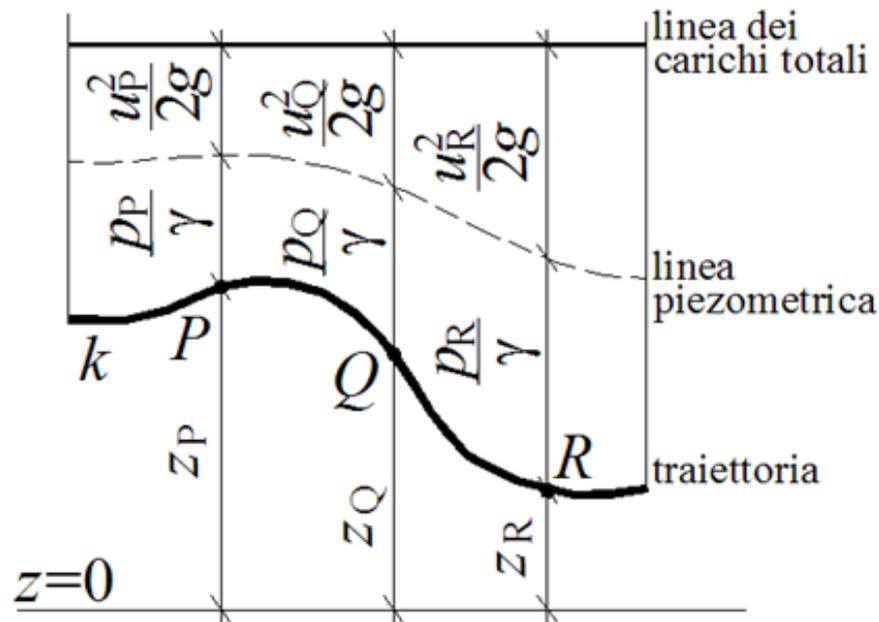


Traiettorie localmente rettilinee e parallele sulla sezione piana Σ

Significato geometrico del Teorema di Bernoulli

Geometric significance of the Bernoulli principle

Si consideri la traiettoria k proiettata su di un piano verticale. Sia $z=0$ la traccia di un piano orizzontale di riferimento. Siano P, Q, R, \dots , le posizioni spaziali assunte da una particella liquida in movimento su k , in successivi istanti temporali.

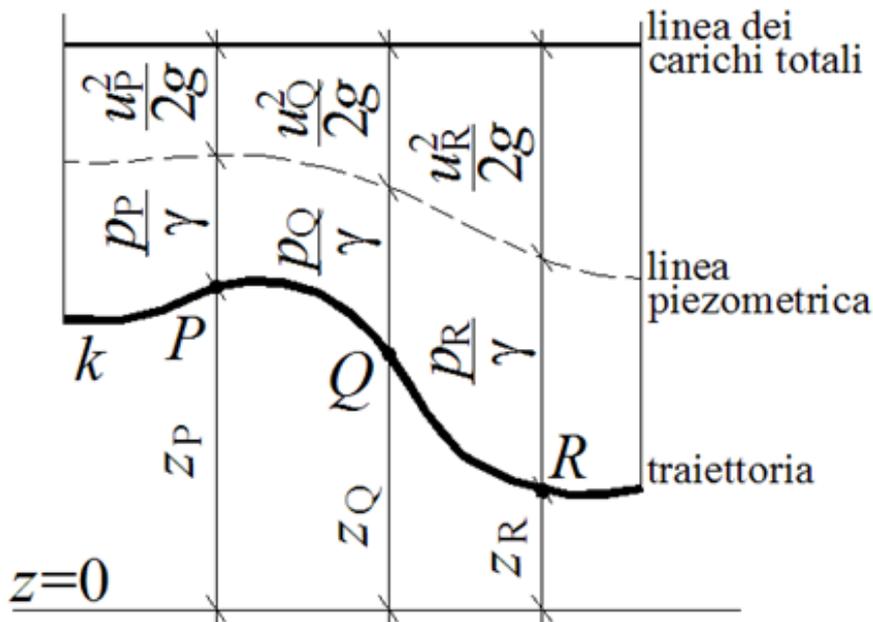


Significato geometrico del Teorema di Bernoulli

Geometric significance of the Bernoulli principle

Nell'ipotesi di liquido ideale, pesante, incompressibile, in regime di moto stazionario, il carico totale H è costante e dunque è possibile scrivere:

$$z_P + \frac{p_P}{\gamma} + \frac{u_P^2}{2g} = z_Q + \frac{p_Q}{\gamma} + \frac{u_Q^2}{2g} = z_R + \frac{p_R}{\gamma} + \frac{u_R^2}{2g} = H$$



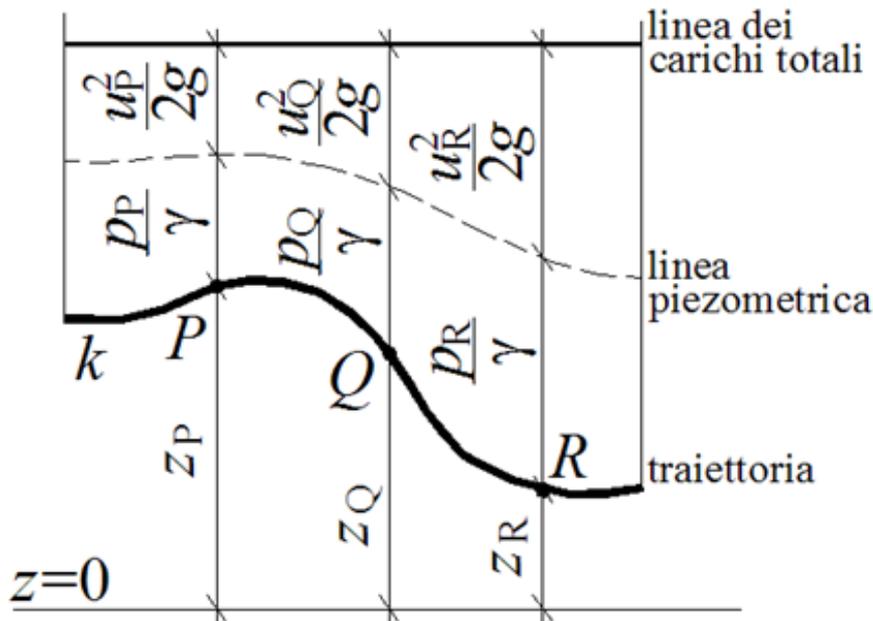
La linea dei carichi totali tende cioè a disporsi parallelamente al piano di riferimento. La curva $h(s)$, luogo dei punti $z + \frac{p}{\gamma}$ è definita *linea piezometrica*.

Significato energetico del Teorema di Bernoulli

Energetic significance of the Bernoulli principle

- *energia di pressione specifica* $\frac{p}{\gamma}$: corrisponde al lavoro che la forza idrostatica netta $dp \underline{s}$ $d\sigma$ compie per uno spostamento infinitesimo lungo la traiettoria $d\underline{s} = \underline{u} dt$.

$$dL_p = dp \underline{s} d\sigma \cdot \underline{u} dt \underline{s} = \frac{dp}{\rho g} g(\rho d\sigma ds) = d \left(\frac{p}{\gamma} dm g \right)$$



- *energia cinetica specifica o forza viva* $\frac{u^2}{2g}$: corrisponde al lavoro compiuto dalla variazione temporale di quantità di moto $= dm \frac{du}{dt}$ subita dalla particella di massa dm per lo spostamento $\underline{u} dt$.

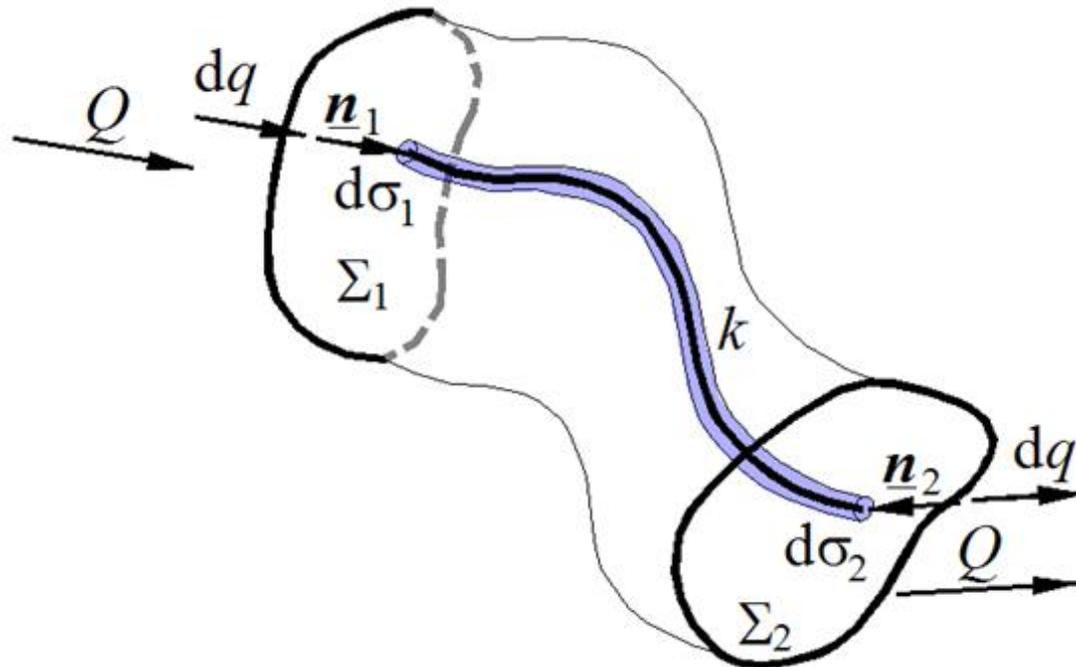
$$dL_c = dm \frac{du}{dt} \cdot \underline{u} dt = dm \frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{2} \right) dt = d \left(\frac{u^2}{2g} dm g \right)$$

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

Si consideri una corrente ideale e per essa un suo tubo di flusso delimitato dalla superficie permeabile piana di ingresso Σ_1 , dalla superficie permeabile piana di uscita Σ_2 e dalla superficie laterale impermeabile Σ_i :

Non è necessario che Σ_1 e Σ_2 risultino complanari ma occorre che i filetti attraverso esse siano sostanzialmente rettilinei e paralleli. In questo modo la quota piezometrica su Σ_1 e Σ_2 risulterà costante.

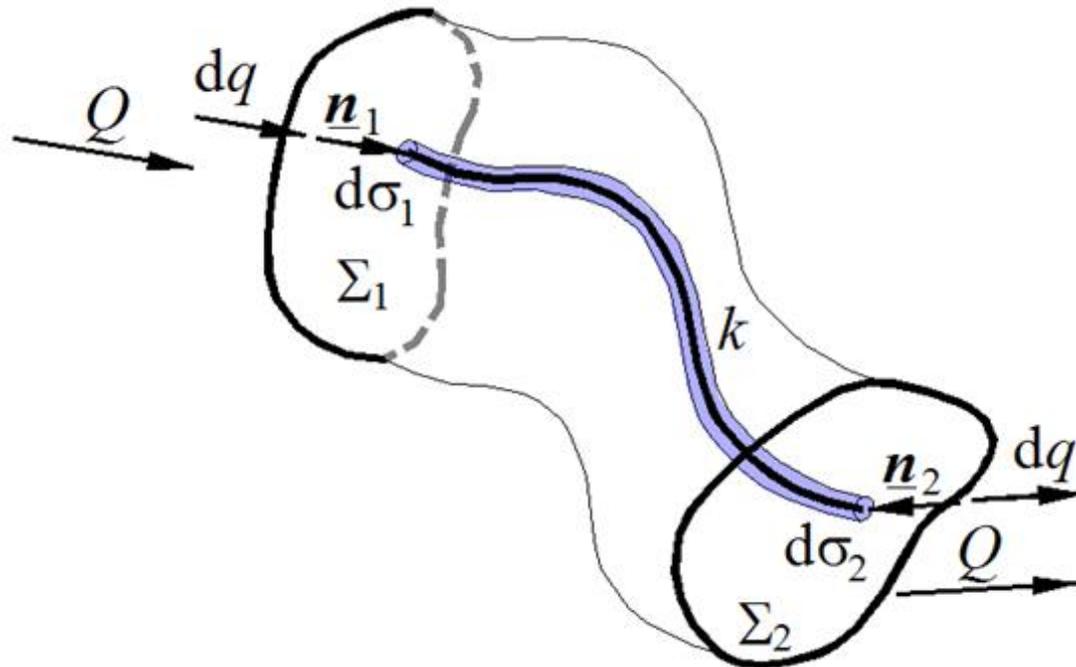


Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

All'interno del tubo di flusso i filetti potranno generalmente variare, potendo localmente convergere o divergere.

Si assumano le stesse ipotesi formulate per la traiettoria: liquido ideale ($\mu=0$), pesante (sottoposto cioè alla gravità \underline{g}), incomprimibile ($\rho=\text{cost}$), in regime di moto stazionario ($\partial(\cdot)/\partial t=0$). Il tubo di flusso risulterà pertanto invariabile nello spazio al variare del tempo.

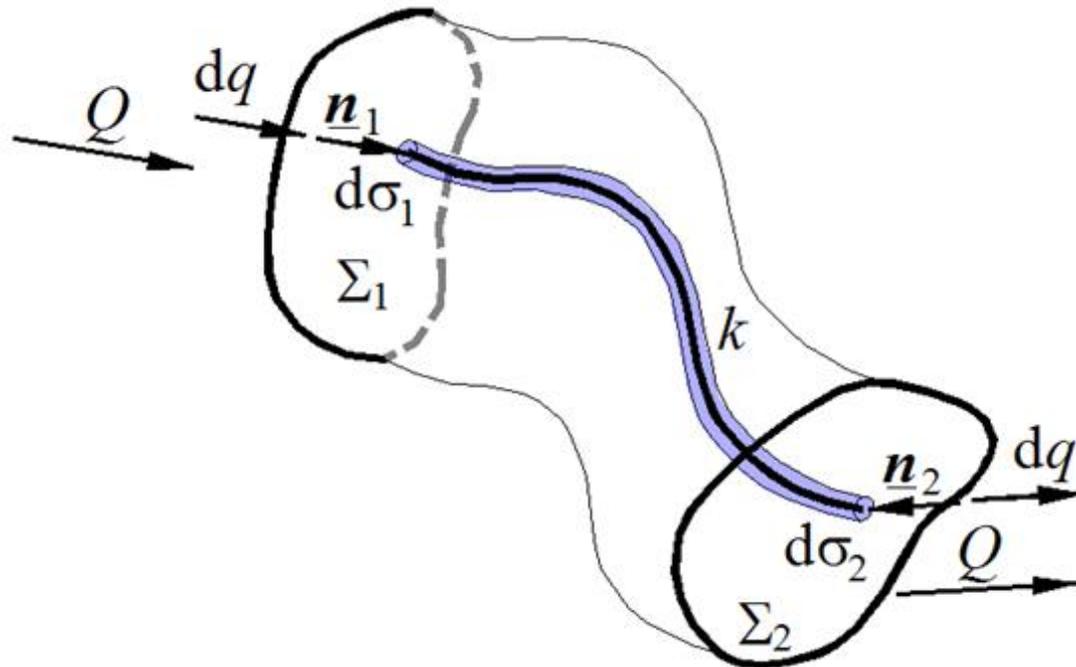


Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

La corrente sia caratterizzata da un verso di portata parallelo e concorde con il versore \underline{n}_1 , identificativo della giacitura di Σ_1 e da un verso di portata parallelo e discorde con il versore \underline{n}_2 , identificativo della giacitura di Σ_2 .

Si consideri ora il filetto elementare centrato sulla traiettoria k inclusa nel tubo di flusso. Siano $d\sigma_1 \in \Sigma_1$ e $d\sigma_2 \in \Sigma_2$ le sue areole di ingresso e di uscita.



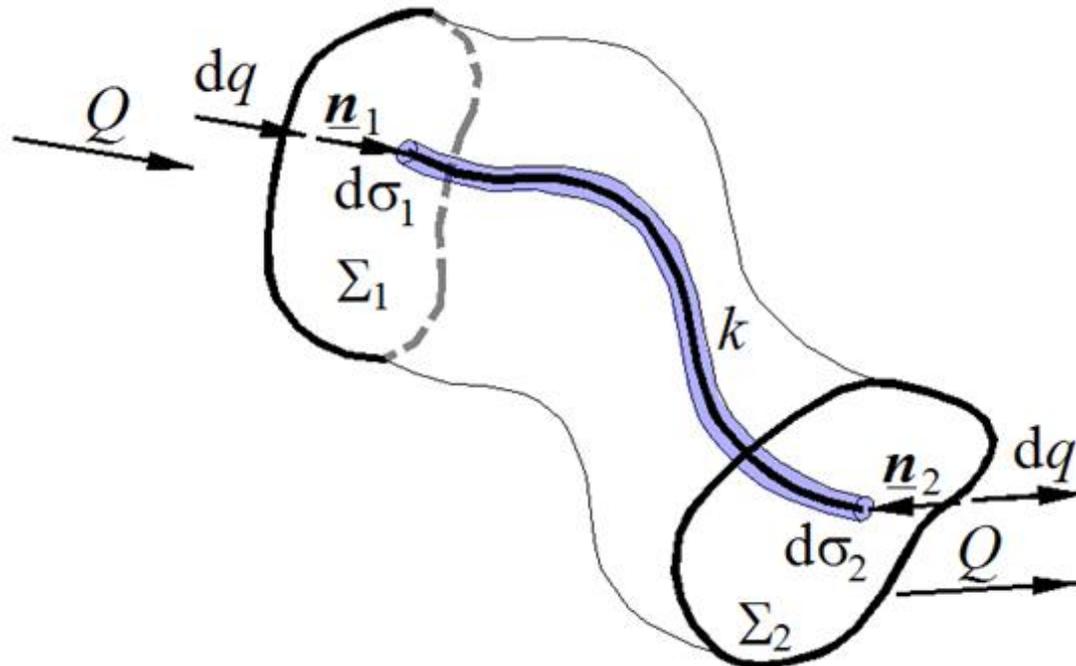
Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

Data l'ipotesi di liquido incompressibile e la condizione introdotta di moto permanente, la portata elementare dq_1 in ingresso al filetto è uguale e contraria alla portata in uscita dq_2 (cfr lezione 20 ottobre 2016), ovvero:

$$\underline{u}_1 \cdot \underline{n}_1 d\sigma_1 = -\underline{u}_2 \cdot \underline{n}_2 d\sigma_2$$

Passando ai moduli: $dq = u_1 d\sigma_1 = u_2 d\sigma_2$



Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

$$dq = u_1 d\sigma_1 = u_2 d\sigma_2$$

in cui dq è la portata elementare in modulo, costante attraverso tutto il filetto, u_1 ed u_2 sono i moduli del vettore velocità in corrispondenza delle areole terminali $d\sigma_1 \in \Sigma_1$ e $d\sigma_2 \in \Sigma_2$.

Si definisce *potenza elementare* della massa liquida in transito attraverso la generica areola $d\sigma$ del filetto, la quantità:

Elementary power of the liquid mass through the infinitesimal area $d\sigma$:

$$dW = \gamma H dq$$

dove H è il carico totale riferito alla traiettoria k .

La potenza elementare, espressa in W (Watt) nelle unità del S.I., è il prodotto di tre quantità invariabili lungo la traiettoria ragion per cui essa stessa resta invariabile. Con riferimento alle areole di ingresso e di uscita è possibile allora scrivere:

$$\gamma H_1 u_1 d\sigma_1 = \gamma H_2 u_2 d\sigma_2$$

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

$$\gamma H_1 u_1 d\sigma_1 = \gamma H_2 u_2 d\sigma_2$$

Ne deriva che la potenza della corrente nella sezione Σ_1 è uguale alla potenza nella sezione Σ_2 , ovvero:

$$\gamma \int_{\Sigma_1} H_1 u_1 d\sigma_1 = \gamma \int_{\Sigma_2} H_2 u_2 d\sigma_2$$

Esplicitando il carico totale H :

$$\gamma \int_{\Sigma_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \right) u_1 d\sigma_1 = \gamma \int_{\Sigma_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \right) u_2 d\sigma_2$$

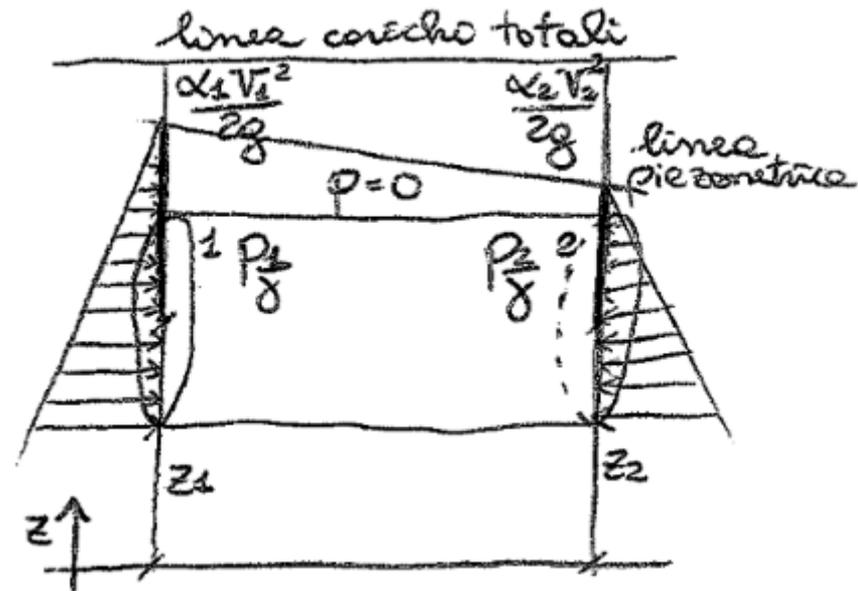
Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

$$\gamma \int_{\Sigma_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} \right) u_1 d\sigma_1 = \gamma \int_{\Sigma_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \right) u_2 d\sigma_2$$

Nell'ipotesi di corrente lineare (filetti sostanzialmente rettilinei e paralleli) sulle sezioni estreme Σ_1 e Σ_2 , la quota piezometrica $z + \frac{p}{\gamma}$ è su di esse costante.

Sulle dette sezioni, la pressione p risulta quindi *distribuita secondo legge idrostatica*, variando secondo legge lineare.



Per la proprietà additiva degli integrali si può pertanto scrivere:

$$\gamma \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) \int_{\Sigma_1} u_1 d\sigma_1 + \gamma \int_{\Sigma_1} \frac{u_1^3}{2g} d\sigma_1 = \gamma \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \int_{\Sigma_2} u_2 d\sigma_2 + \gamma \int_{\Sigma_2} \frac{u_2^3}{2g} d\sigma_2$$

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

$$\gamma \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) \int_{\Sigma_1} u_1 \, d\sigma_1 + \gamma \int_{\Sigma_1} \frac{u_1^3}{2g} \, d\sigma_1 = \gamma \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \int_{\Sigma_2} u_2 \, d\sigma_2 + \gamma \int_{\Sigma_2} \frac{u_2^3}{2g} \, d\sigma_2$$

Per quanto concerne gli integrali moltiplicativi delle quote piezometriche, è possibile riconoscere in essi la portata Q circolante nel tubo di flusso:

$$Q = \int_{\Sigma_1} u_1 \, d\sigma_1 = \int_{\Sigma_2} u_2 \, d\sigma_2$$

I rimanenti integrali di superficie non sono in genere di agevole risoluzione. Il loro computo richiederebbe la conoscenza della distribuzione della velocità sull'intera sezione trasversale. Tale informazione non sempre è disponibile.

Si preferisce pertanto riassumere la variabilità spaziale della velocità al cubo nel *coefficiente di Coriolis*, o *coefficiente di ragguglio delle potenze cinetiche*:

$$\alpha_i = \int_{\Sigma_i} \frac{u_i^3}{V_i^3 \Sigma_i} \, d\sigma_i, \quad i = 1, 2$$

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

$$\gamma \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) \int_{\Sigma_1} u_1 d\sigma_1 + \gamma \int_{\Sigma_1} \frac{u_1^3}{2g} d\sigma_1 = \gamma \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \int_{\Sigma_2} u_2 d\sigma_2 + \gamma \int_{\Sigma_2} \frac{u_2^3}{2g} d\sigma_2$$



$$\gamma \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) Q + \gamma \alpha_1 \frac{V_1^3 \Sigma_1}{2g} = \gamma \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) Q + \gamma \alpha_2 \frac{V_2^3 \Sigma_2}{2g} \quad \alpha_i = \int_{\Sigma_i} \frac{u_i^3}{V_i^3 \Sigma_i} d\sigma_i \quad i = 1, 2$$

Essendo $Q = v_1 \Sigma_1 = v_2 \Sigma_2$ si perviene al risultato finale:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

formalmente identica all'eq. di Bernoulli riferita alla singola traiettoria, se non fosse per il coefficiente α , moltiplicativo del termine cinetico e per la presenza della velocità media. I membri dell'equazione sopra scritta rappresentano per analogia il trinomio di Bernoulli riferito ad una corrente.

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

I tre termini z , $\frac{p}{\gamma}$ e $\alpha \frac{v^2}{2g}$ corrispondono ai contributi energetici specifici già discussi lungo una traiettoria, con la differenza che, in questo caso, sono riferiti all'intero tubo di flusso considerato.

Poiché la somma $z + \frac{p}{\gamma}$ è costante sulle sezioni estreme – e su ogni sezione ove il moto resta lineare – è consuetudine fissare per z la quota del baricentro della sezione. Il termine $\frac{p}{\gamma}$ pertanto è riferito alla pressione nel baricentro.

L'eq. Sopra riportata esprime il teorema di Bernoulli esteso ad una corrente ideale: lungo un tubo di flusso attraversato da una corrente lineare ai suoi estremi ed in regime di moto stazionario, costituita da un liquido ideale, pesante, incompressibile, il *carico totale* H è costante.

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente ideale

Extension of the Bernoulli principle to ideal currents

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

Nel caso la velocità risulti distribuita con regolarità sulla sezione trasversale (assenza di picchi localizzati, assenza di inversioni di movimento), α risulta superiore dell'unità di qualche percento. Nella maggioranza delle applicazioni di interesse ingegneristico si pone pertanto $\alpha \approx 1$, ritenendo accettabile l'errore commesso con tale posizione.

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente reale

Extension of the Bernoulli principle to real currents

Nel caso di liquidi reali in movimento in regime di moto stazionario, l'energia a disposizione diminuisce nel verso della portata a causa delle resistenze offerte.

La linea dei carichi totali H non sarà più parallela al piano di riferimento ma si avvicinerà ad esso, nella direzione del moto.

Le perdite di carico (o energetiche) sono concettualmente raggruppabili in due categorie: *continue* e *concentrate*.

Le perdite di carico *continue* insorgono durante l'avanzamento a causa della viscosità del liquido e della turbolenza, se esistente.

Le perdite di carico *continue* dipendono quindi dalle **proprietà del liquido** e dal **tipo di movimento**, ma anche dal diametro e scabrezza della parete interna e della lunghezza i -esima del tratto considerato.

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente reale

Extension of the Bernoulli principle to real currents

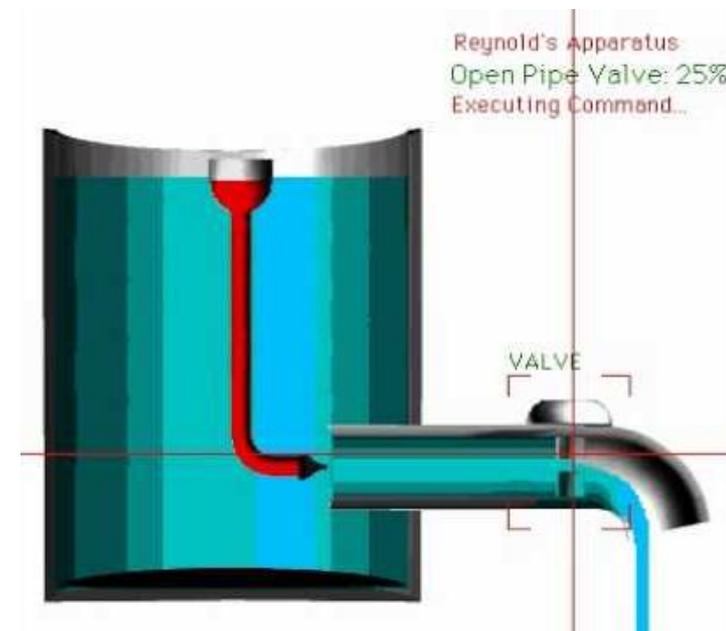
Si definisce cadente piezometrica J , la perdita di carico continua per unità di lunghezza di tubazione. Graficamente, corrisponde alla derivata spaziale locale del carico totale H . La perdita di carico continua totale ΔH_{cont} tra due estremi di un condotto lungo L , attraversato da un liquido risulterà pertanto pari a:

$$\Delta H_{\text{cont}} = J L$$

per J costante lungo il condotto.

Chi per primo distinse i tipi di movimento fu Osborne Reynolds nei suoi famosi esperimenti condotti nel 1883 presso i laboratori di idraulica dell'Università di Manchester.

https://it.wikipedia.org/wiki/Regime_turbolento

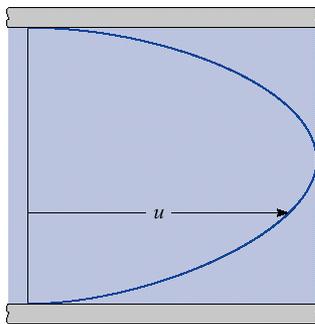
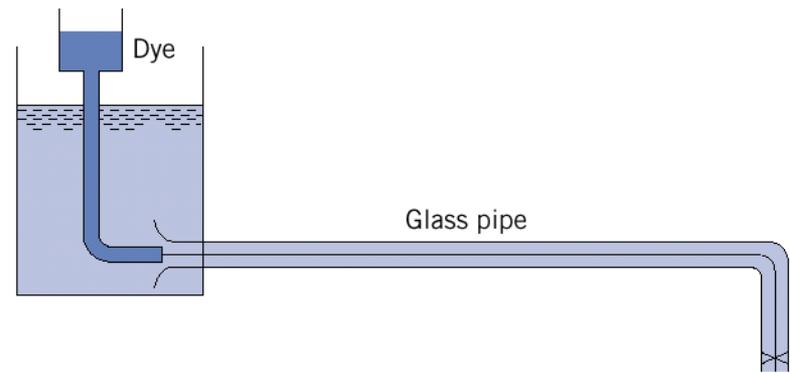


L'esperimento di Reynolds

The Reynolds experiment

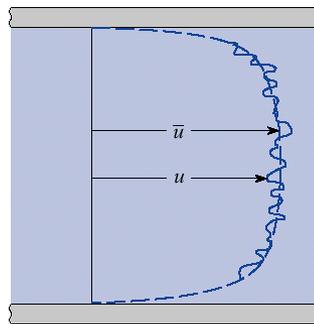
- Reynolds Number
- Laminar flow: Fluid moves in smooth streamlines
- Turbulent flow: Violent mixing, fluid velocity at a point varies randomly with time
- Transition to turbulence in a 2 in. pipe is at $V=2$ ft/s, so most pipe flows are turbulent

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \begin{cases} < 2000 & \text{Laminar flow} & J \propto V \\ 2000 - 4000 & \text{Transition flow} \\ > 4000 & \text{Turbulent flow} & J \propto V^2 \end{cases}$$



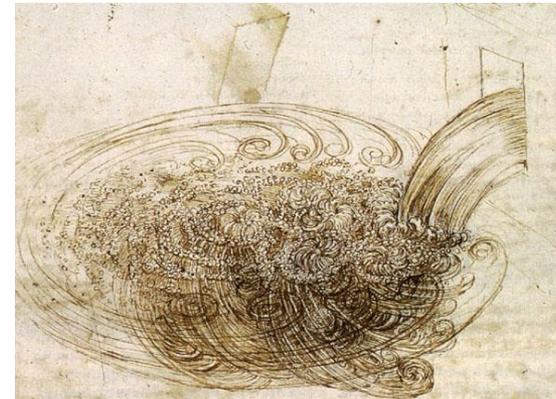
(a)

Laminar



(b)

Turbulent



Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente reale

Extension of the Bernoulli principle to real currents

La perdita di carico concentrata ΔH_{conc} dipende invece da discontinuità locali (cambio di diametro, imbocco, sbocco in un serbatoio, deviazioni piano-altimetriche).

Essa può essere espressa in funzione del termine cinetico disponibile a monte o a valle della discontinuità:

$$\Delta H_{\text{conc}} = \varepsilon \frac{V^2}{2g}$$

in cui V è la velocità media corrispondente di monte o di valle mentre ε dipende dalla configurazione della singolarità. Tra due generici punti A (a monte) e B (a valle) di un sistema di condotte in serie è possibile formulare la seguente equazione generale del moto:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_A \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \alpha_B \frac{v_B^2}{2g} + \sum_{i=1}^m J_i L_i + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{v_j^2}{2g}$$

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente reale

Extension of the Bernoulli principle to real currents

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_A \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \alpha_B \frac{v_B^2}{2g} + \sum_{i=1}^m J_i L_i + \sum_{j=1}^n \epsilon_j \frac{v_j^2}{2g}$$

dove le sommatorie comprendono rispettivamente tutte le perdite di carico continue (su m tubazioni) e concentrate (n brusche variazioni) comprese tra i due punti. La concreta applicazione della equazione passa attraverso la posizione $\alpha_A = \alpha_B \approx 1$ peraltro confermata dal punto di vista ingegneristico per moti turbolenti.

La stessa assunzione non trova adeguata giustificazione per numeri di Reynolds bassi e/o per profili spaziali di velocità non regolari, come già anticipato trattando delle correnti ideali.

Estensione del teorema di Bernoulli ad una corrente reale

Extension of the Bernoulli principle to real currents

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \alpha_A \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \alpha_B \frac{v_B^2}{2g} + \sum_{i=1}^m J_i L_i + \sum_{j=1}^n \epsilon_j \frac{v_j^2}{2g}$$

