

Modellistica del moto ondoso ONDEREALI



*Mare agitato con creste di schiuma – Da circa 300 m di quota*

Le parti **marcate in blu** NON sono comprese nel programma del Master e servono per assicurare gli studenti più precisi

*Le parti in corsivo sono da svolgere autonomamente come esercizio*

## PREMESSA

Il lavoro di elaborazione dei dati ondametrici è stato svolto da Pino Spulsi, le elaborazioni sui dati spettrali sintetici da Ferdinando Reale

Questi appunti contengono parti tratte dalle dispense [www.dica.unict.it/users/efoti/ing\\_cost/ing\\_cost\\_lez.htm](http://www.dica.unict.it/users/efoti/ing_cost/ing_cost_lez.htm) del [Prof Enrico Foti](#) dell'Università di Catania. La responsabilità di ogni inesattezza derivante dall'adattamento è ovviamente solo mia- EPC

Tutto quanto esaminato finora riguarda lo studio di un treno d'onde lineare e sinusoidale , cioè di un'astrazione che in certe situazioni si dimostra aderente alla realtà, ma in molti altri casi è inadeguata a spiegare quello che avviene realmente.

Inizieremo ora invece da un altro punto di vista, cioè dall'esame di dalle effettive misure in mare del moto ondoso, e svilupperemo su queste misure due diversi approcci: uno empirico, di carattere prevalentemente statistico, un altro analitico. Alle fine ricondurremo tutti questi punti di vista ad una visione unica

### Misure del moto ondoso in mare

La forma delle onde che si generano in mare sotto l'azione del vento è estremamente complessa; l'esperienza comune, così come le registrazioni effettuate in campo, indicano che le altezze, i periodi, le lunghezze d'onda e le direzioni di propagazione delle onde reali risultano variabili in maniera caotica anche.

La maggior parte rilievi del moto ondoso sono effettuati con ondametri, cioè con apparecchiature che registrano l'altezza istantanea d'acqua  $\eta(t)$  in un punto ben definito.

La  $\eta(t)$  viene ovviamente campionata e registrata in maniera discreta ( $\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_i$ ), con una frequenza di 2-4 Hz (= 2-4 volte al secondo)

Attenzione a non confondere l'altezza d'acqua istantanea  $\eta(t)$  con l'altezza d'onda H!



Gli ondometri sono di diversi tipi:

Boe ondametriche: (dettagli su [www.eugeniopc.it/research/ondametria/Field.htm](http://www.eugeniopc.it/research/ondametria/Field.htm))

La boa è ancorata al fondo con un ancoraggio molto flessibile e segue la superficie libera dell'onda; l'andamento temporale dell'altezza dell'acqua istantanea  $\eta(t)$  si ottiene a partire dalla misura dell'accelerazione (boe accelerometriche), o dal rilievo GPS della velocità. (<http://www.eugeniopc.it/investigacion/ondametria/Field.htm>) La maggior parte delle stazioni di misura della Rete Ondametrica Nazionale ([www.idromare.it](http://www.idromare.it)) sono di questo tipo.

Le boe, ormeggiate solitamente su fondali abbastanza profondi (oltre 60 metri) rilevano i parametri di interesse e li ritrasmettono ad una stazione ricevente in tempo reale o quasi. Successivamente vengono elaborati dalla sede centrale e resi disponibili per l'

Vengono normalmente svolte acquisizioni prioritarie, ciascuna di 20'-30', per le quali sono disponibili i valori di altezza d'onda significativa, periodo di picco e direzione.

Ecco alcuni siti che riportano dati storici o in tempo quasi reale

*Il sito dell'ISPRA – ex ANPA ex Servizio Idrografico e Mareografico Nazionale contiene utili informazioni sulla Rete Ondametrica RON. Bisogna iscriversi, e non sempre funziona!*

[www.telemisura.it](http://www.telemisura.it) solo dati in tempo reale

[http://www.puertos.es/oceanografia\\_y\\_meteorologia/redes\\_de\\_medida/index.html](http://www.puertos.es/oceanografia_y_meteorologia/redes_de_medida/index.html)  
(Spagna)

[www.channelcoast.org/data\\_management/real\\_time\\_data/charts/](http://www.channelcoast.org/data_management/real_time_data/charts/)  
(Regno Unito, Manica)

L'“Atlante delle Coste” dell' ARPAC

[www.isprambiente.it/it/servizi-per-lambiente/stato-delle-coste/atlante-delle-coste](http://www.isprambiente.it/it/servizi-per-lambiente/stato-delle-coste/atlante-delle-coste)

riporta molti utili dati ed elaborazioni relativi alle coste italiane

Misura della altezza d'acqua su palo

Un'altra tecnica frequentemente impiegata è la misura dell'altezza d'acqua  $\eta(t)$  attraverso uno strumento montato su un palo. Questo è naturalmente possibile solo su fondali relativamente bassi. Le informazioni sulla direzione si ottengono attraverso la misura delle velocità orbitali  $V_x(t)$  e  $V_y(t)$  viste in precedenza. Ce ne è uno al largo di Foce Sele, altri due sono stati appaltati dalla Protezione Civile Campania.

Pressione sul fondo

Un altro metodo ancora è quello di misurare la pressione sul fondo attraverso una cella di pressione (manometro elettronico) Anche qui, se si desidera conoscere la direzione delle onde, si devono eseguire in contemporanea le misure di  $V_x(t)$  e  $V_y(t)$ .

Misure radar

Misure satellitari

Le misure a distanza attraverso il radar, sia da terra che da satellite, vanno prendendo sempre più importanza nella pratica operativa. Tuttavia, a differenza dei sistemi in situ (boe, pali, misuratori di pressione) le misure radar (tra cui ci

sono quelle satellitari) non forniscono valori istantanei dell'altezza d'acqua, ma direttamente i valori medi degli stati di mare di cui si parla nel seguito. Lo studio di questi argomenti va quindi rimandato a quando tutto il contenuto di questo blocco di appunti sarà stato assimilato.

### Analisi statistica empirica

Si deve definire il concetto stesso di "onda" in un mare caratterizzato da un'agitazione caotica (si dice spesso "casuale", oppure "random"); si deve inoltre costruire una procedura per il calcolo dei parametri che caratterizzano uno "stato di mare", cioè un certo periodo di tempo sufficientemente lungo da comprendere molte onde, ma abbastanza breve da poter essere considerato mediamente stazionario. Gli ondometri normalmente effettuano l'analisi dei parametri statistici del moto ondoso per una durata di 20'-30'.

Occorre in primo luogo definire la singola onda; dunque il criterio più utilizzato è quello dello *zero up-crossing*, che verrà illustrato ed applicato *durante le esercitazioni* (si veda anche [http://en.wikipedia.org/wiki/Wave\\_height](http://en.wikipedia.org/wiki/Wave_height). e Foti 9-1 e 9-2) tramite il quale l'onda viene individuata da due passaggi consecutivi verso l'alto dallo zero (livello medio del mare).

Dalla registrazione di  $\eta(t)$  di un dato stato di mare si ricavano dunque le  $N$  onde  $H_i$  di un dato stato di mare.

Dal punto di vista applicativo interessano i valori statistici delle onde per un dato stato di mare. I parametri più in uso sono i seguenti:

$H_m$  (media delle  $H_i$ ),

$H_{rms}$  (media quadratica delle altezze d'onda), onda quadratica media, data da

$$H_{rms} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i^2 \right\}^{1/2}$$

$H_{1/3}$ ,  $H_s$  (altezza d'onda significativa, definita come la media del terzo delle altezze delle onde più alte rilevate in un certo intervallo temporale),

$H_{1/10}$  (altezza "un decimo", utile per la progettazione di alcune opere)

$T_m$ : Periodo medio

$T_s$ : Periodo dell'onda significativa

Un parametro molto importante è  $\sigma_{\eta}$ , (deviazione standard delle altezze istantanee d'acqua).

NB NON CONFONDERE QUESTA  $\sigma_{\eta}$  con la  $\bar{\sigma}$  che compare nella formula di Airy come frequenza dell'onda sinusoidale monocromatica, e che in queste pagine si indica con  $f$

$\sigma_{\eta}$  è anch'esso un parametro caratteristico dello stato di mare, ed a esso sono legati, come vedremo i parametri della distribuzione delle  $H_i$  definiti sopra:

( Attenzione a non confondere i parametri statistici di uno stato di mare ( $H_m$ ,  $H_{rms}$ ,  $T_m$  etc ) con l'altezza di una

singola onda  $H_i$  !!!) 

Le altezze delle onde in un certo stato di mare si distribuiscono secondo la di distribuzione statistica ("Rayleigh"):  $p(H)$ , che fornisce la densità di probabilità di un'onda di altezza  $h$  in uno stato di mare caratterizzato dal parametro  $\sigma_{\eta}$ . La corrispondente probabilità cumulata  $P(H)$  fornisce la probabilità che una data onda sia minore di  $H$ .

$$p(H) = \frac{2H}{H_{rms}^2} \exp\left(\frac{-H^2}{H_{rms}^2}\right)$$
$$P(H) = 1 - \exp\left(\frac{-H^2}{H_{rms}^2}\right)$$

Questi parametri sono legati tra di loro da relazioni fisse; in particolare:

$$H_{1/3} = 4 \sigma_{\eta}$$

Il parametro  $4 \sigma_{\eta}$  viene spesso indicato come  $H_{mo}$ , si ha dunque

$$H_{1/3} = H_{mo} = 4 \sigma_{\eta}$$

Inoltre

$$H_{1/3} = \sqrt{2} * H_{rms} \cong 1,41 H_{rms}$$

e quindi

$$H_{rms} = \frac{H_{1/3}}{\sqrt{2}} \cong \frac{4}{\sqrt{2}} \sigma_{\eta} = 2\sqrt{2} \sigma_{\eta}$$

Inoltre:

$$H_m = H_{rms} * 0.886$$

$$H_{1/10} = 2.03 * H_m = 1,8 H_{rms} = 1,29 * H_{1/3}$$

Queste relazioni sono molto utili e permettono di stimare tutti i parametri necessari a partire da  $\sigma_{\eta}$ , che è facilmente calcolabile a partire dai dati sperimentali di  $\eta(t)$ .

### Lo spettro del moto ondoso

(Si veda anche il testo di Foti da 9.4.2 fino a 9.4.2.2 incluso, tranne autocorrelazione)

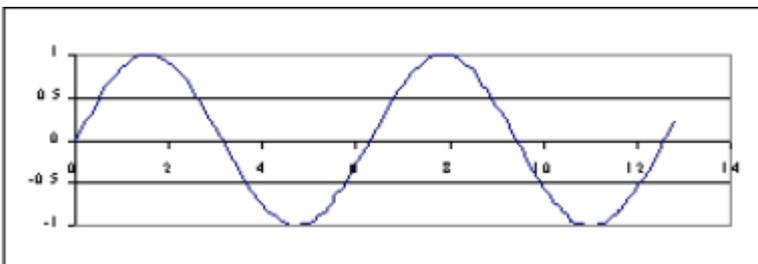
Un altro modo di caratterizzare uno stato di mare è quello basato sull'analisi spettrale temporale e spaziale dell'altezza d'acqua istantanea.

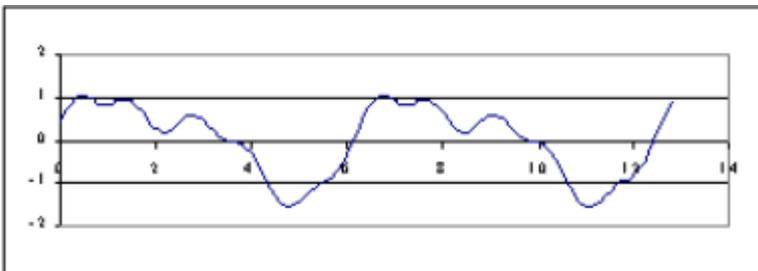
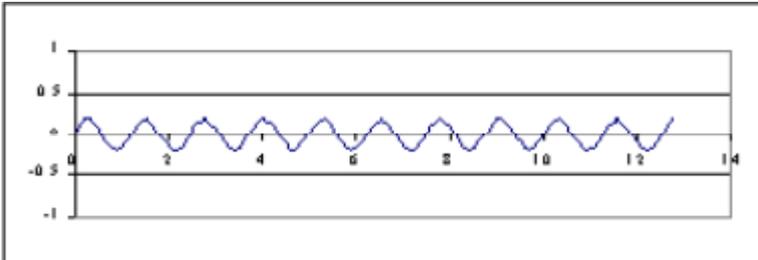
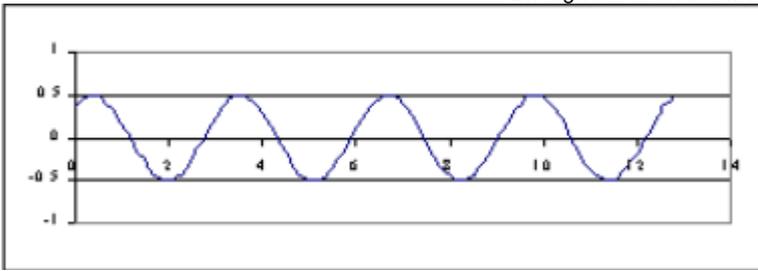
Mettiamoci nei panni di un osservatore (un ondometro) che in un punto fisso misuri l'altezza istantanea  $\eta(t)$ : è possibile formarsi un concetto intuitivo del concetto di analisi spettrale, assumendo che la funzione  $\eta(t)$ , sia rappresentabile tramite una somma di N termini sinusoidali;

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^N a_j \cos(\omega_j t - \phi_j)$$

dove  $a_j$  è l'ampiezza,  $\omega_j$  la pulsazione e  $\phi_j$  la fase della j-ma componente; i valori di  $\phi_j$  sono arbitrari e possono essere assegnati liberamente per i nostri scopi; i valori di  $a_j$  rappresentano i pesi delle varie componenti di pulsazione  $\omega_j$ .

NB: la pulsazione  $\omega = 2 \pi / T$  è legata alla frequenza  $f = 1/T$  da:  $\omega = 2 \pi * f$ ; f è stata indicata nella prima parte del corso con  $\sigma$





Esempio di segnale  $\eta(t)$  (figura in basso) ottenuto come sovrapposizione di tre funzioni armoniche monocromatiche di ampiezza  $a_j$  e pulsazione  $\omega_j$  diverse, sfasate casualmente ( $\Phi_j$ ) tra loro.

(da: Appunti dal corso di Regime e Protezione dei Litorali del prof. Foti, Università di Catania)

In tutto il corso lavoreremo nel discreto e ci riferiremo a valori delle funzioni campionate – come ad esempio, nella realtà, è campionata nel tempo la  $\eta(t)$  – ma per comprendere appieno questi concetti occorrerebbe svolgere ragionamenti e definizioni nel continuo, cosa per niente semplice, e per cui bisogna aver chiari i concetti di trasformata di Fourier e di spettro di potenza: per passare al continuo, alla sommatoria si sostituisce l'integrale da  $-\infty$  a  $+\infty$  e si ottiene la trasformata di Fourier,  $a(\omega)$ . Nel seguito, comunque, ci limiteremo a dare i concetti in maniera puramente empirica o intuitiva.

Le  $\omega_j$  sono equi-intervallate; partendo dalla frequenza più bassa  $\omega_1$ , le successive sono date da  $\omega_j = \omega_1 \cdot j$ . Nell'analisi delle registrazioni  $\omega_1$  non può essere più bassa di

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot j / D$$

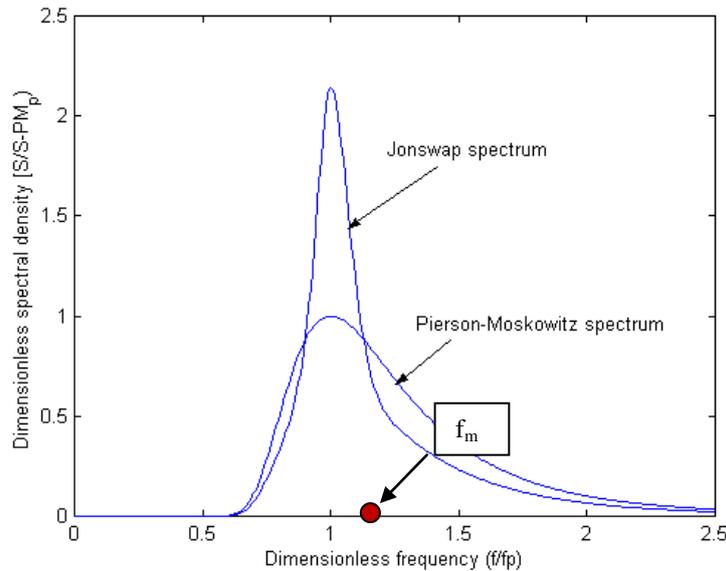
dove D è la durata dell'osservazione

Impiegare una rappresentazione spettrale vuol dire caratterizzare uno stato di mare con la successione delle  $a_j$  sopra definite, date in funzione delle frequenze (spettro di ampiezza). Nella realtà si fa però più spesso ricorso alla funzione che lega  $\omega_j$  (o  $f_j$ ) con  $a_j^2$  (spettro di potenza o di varianza); l'utilità di questa rappresentazione si comprende bene se si ricorda che il quadrato delle ampiezze di oscillazione è l'energia. Nel seguito lo spettro di potenza viene indicato come S o E.<sup>1</sup>

Poiché l'energia di una singola onda regolare è proporzionale alla sua altezza  $H^2$ , è facile comprendere che l'energia di uno stato di mare è proporzionale ad  $H_{rms}^2$  (o ad  $H_m^2$ , o ad  $H_{1/3}^2$ ), ne segue che  $\sigma_\eta^2$  – e quindi l'area dello spettro - è un indicatore dell' energia dello stato di mare

Lo spettro delle onde di mare può essere assai vario. Esistono delle rappresentazioni analitiche e parametriche, tra le quali la più comunemente usata è quella del cosiddetto spettro JONSWAP.

<sup>1</sup> Al posto di  $\omega$ , come sempre si può usare la frequenza  $f$  con  $\omega = 2\pi f$



NB la rappresentazione qui riportata è adimensionale- le frequenze sono rapportate alla frequenza di picco  $f_p$

La forma dello spettro di Jonswap (NON a memoria). è

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right] \gamma^r \quad r = \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2 \sigma^2 \omega_p^2} \right]$$

(da <http://ancona.ismar.cnr.it/IPO/IPO-16/capitolo16.htm>)

I parametri dello spettro JONSWAP sono dunque 4, di cui due di significato fisico immediato:

$\alpha$  Un moltiplicatore: legato all'energia totale dello spettro, e quindi, come si è visto, all'altezza significativa dello stato di mare ("Parametro di Philips")

$\omega_p$  che è il valore corrispondente al picco dello spettro ( $\omega_p = 2\pi/T_p$ ;  $f_p = \omega_p/2\pi$ )

$\sigma$  un parametro empirico; non c'entra nè con la frequenza nè col  $\sigma_n$ !

$\gamma$  un parametro empirico che può variare, ma un valore tipico è  $\gamma = 3,3$

In base a quanto detto prima, si comprende anche perché il parametro  $\alpha$  è legato ad  $H_{1/3}$

Questi parametri possono essere dati dalle seguenti espressioni, il cui significato sarà chiarito in seguito

$$\alpha = 0.076 \left( \frac{U_{10}^2}{Fg} \right)^{0.22} \quad \omega_p = 22 \left( \frac{g^2}{U_{10}F} \right)^{1/3} \quad \sigma = \begin{cases} 0.07 & \omega \leq \omega_p \\ 0.09 & \omega > \omega_p \end{cases}$$

La prima parte della formula (non a memoria)

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right]$$

(quindi senza il termine  $\gamma^r$  "peak enhancement factor") è lo spettro di Pierson Moscovitz e rappresenta un mare "completamente sviluppato" (il significato del termine sarà chiarito nel seguito)

**NB** La funzione  $E(f)$  è data nel continuo, mentre la descrizione spettrale data prima è nel discreto; immaginando di dividere l'asse  $f$  in (piccoli) intervalli  $Df$ , si ha che l'integrale (l'area) di  $E(f)$  nell' intervallo ha energia eguale a quella di una singola onda sinusoidale di ampiezza  $a$  (quindi di altezza  $H/2$ ) legata ad  $E(f)$  da

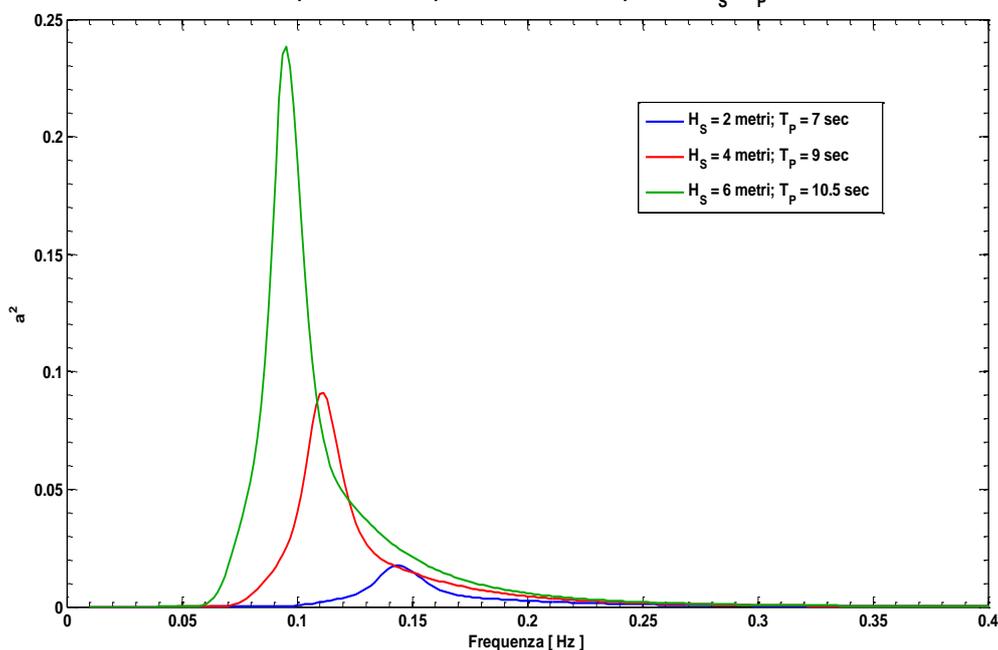
$$\frac{a^2}{2} = E(f) * Df$$

Tutto quanto detto finora riguarda la rappresentazione temporale; si assumono cioè onde di Stokes/Airy, e si suppone di fissare la coordinata spaziale  $x$ . Gli stessi ragionamenti si possono fare nello spazio  $x$ , cioè pensando di fissare il tempo. Si ricordi quello che si è imparato a proposito delle onde di Airy: la  $\eta$  è una funzione sia di  $t$  sia di  $x$ .

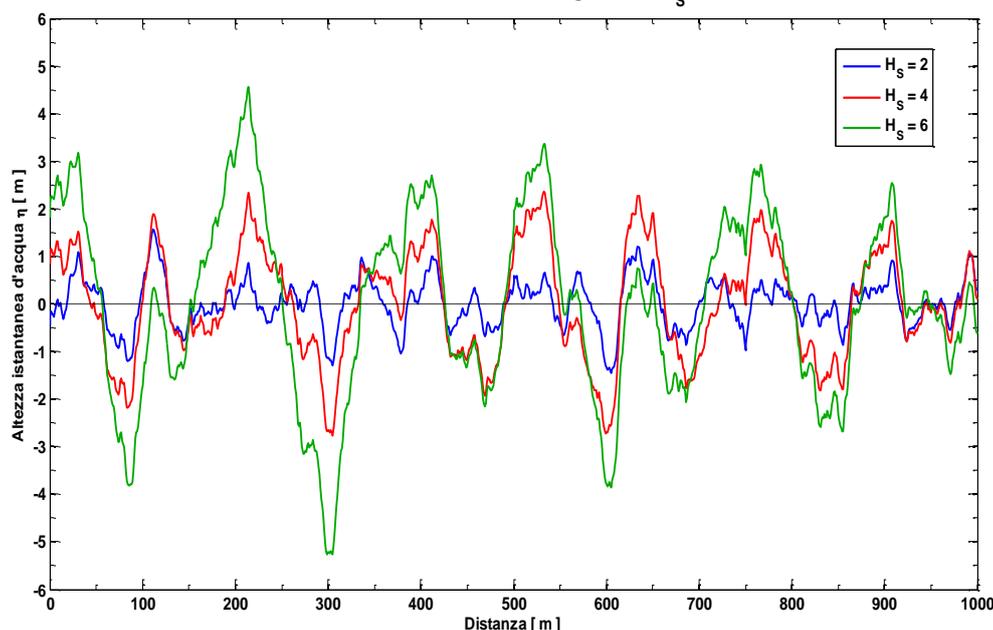
Se immaginiamo che lo stato di mare sia dato dalla somma di molte onde alla Airy (ciò che è vero solo nei limiti discussi all'inizio) possiamo passare dalla rappresentazione temporale a quella spaziale associando ad ogni  $\omega_j$  il corrispondente  $k_j$  ( e quindi lunghezze d'onda  $L_j$ ) attraverso l'equazione della dispersione: si ottengono così spettri spaziali anziché temporali.

**Nel seguito sono illustrati 3 esempi di spettri Jonswap con diversi valori di  $H_s$  (quindi, di  $\alpha$ ) e di  $f_p$ , e le rispettive immagini istantanee dello stato di mare**

Spettri JONSWAP per differenti valori dei parametri  $H_s$  e  $T_p$



Confronto diverse Altezze Significative  $H_s$



## Il concetto di spettro va ora esteso alle due dimensioni spaziali.

Nella foto all'inizio di questi appunti c'è una vista dall'aereo di un mare mosso: si vedono le creste irregolari e la formazione di schiuma .

Solo raramente, le onde si propagano lungo una direzione ben definita e netta (mare "a cresta lunga", "long crested"). In generale le direzioni sono distribuite in maniera più o meno casuale attorno ad una direzione media; si può parlare quindi di componenti direzionali oltre che spettrali, che vengono rappresentate attraverso uno spettro direzionale  $S_d(k, \theta)$ , che a sua volta si può rappresentare con il prodotto di uno spettro JONSWAP con una funzione di spreading ("sparpagliamento")  $D(\theta)$ , dove  $\theta$  è l'angolo rispetto alla direzione principale

$$S_d(k, \theta) = S(k) * D(\theta)$$

Con

$$D(\theta) = \cos(\theta)^{2n} * FN$$

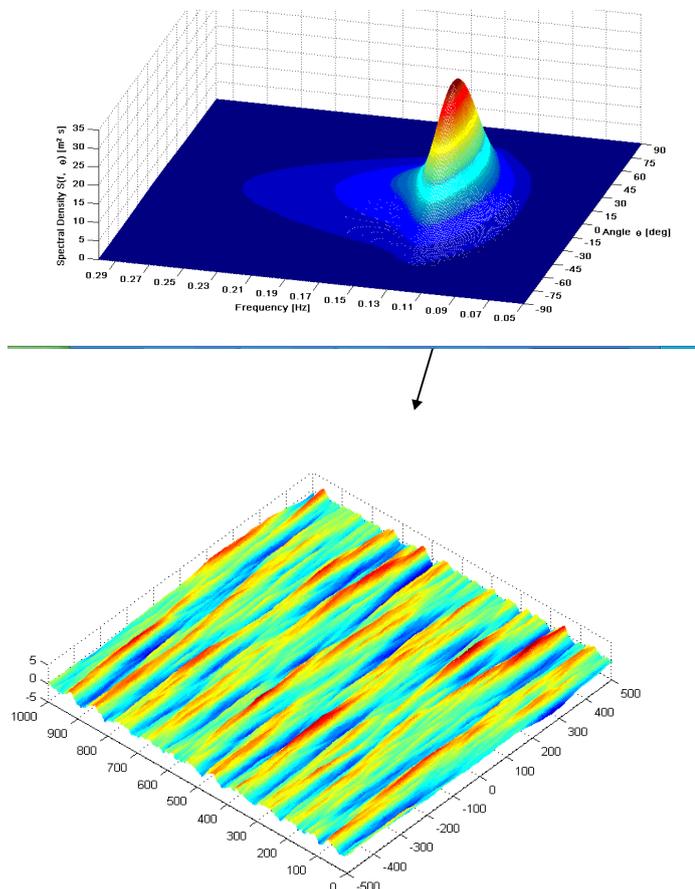
dove FN è un fattore di normalizzazione (l'integrale di  $D(\theta)$  deve essere eguale ad 1).  
Ad esempio, per  $n=1$  ed  $n=2$  si ha:

$$D(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta \quad (|\theta| \leq \frac{\pi}{2})$$

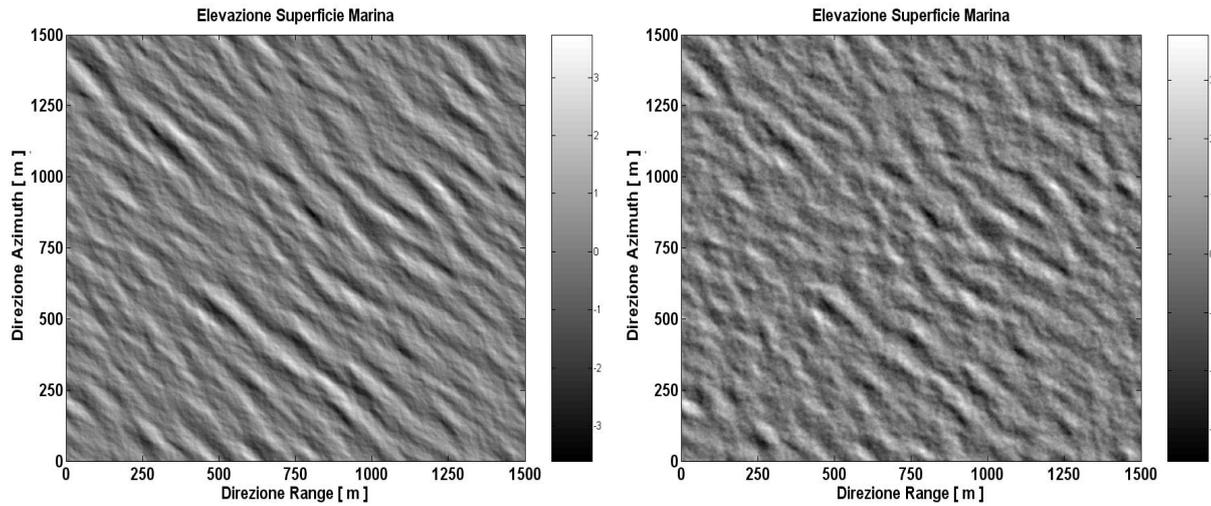
$$D(\theta) = \frac{8}{3\pi} \cos^4 \theta \quad (|\theta| \leq \frac{\pi}{2})$$

Al diminuire del parametro  $n$ , la distribuzione angolare si allarga, vale a dire sono presenti componenti con angoli di propagazione diversi rispetto a quella centrale. Per  $n$  molto grande, lo spettro tende a tornare monodimensionale (a cresta lunga).

La figura seguente mostra uno spettro bidimensionale e la corrispondente superficie marina



Come si è detto, a parità di tutti gli altri parametri spettrali, la dispersione direzionale diminuisce al crescere del parametro di dispersione  $n$ . Al limite per  $n = \infty$  si avrebbe un mare perfettamente unidirezionale. Nella figura seguente si vedono due esempi di superficie marina sintetizzate numericamente. Quella di sinistra è stata ottenuta con  $n = 75$ , quella di destra con  $n = 25$ .



Si ha così che l'andamento spazio-temporale delle  $\eta(x,y,t)$  può essere descritto completamente dallo spettro, sia spaziale sia temporale

Qualche esempio di spettri bidimensionali si trova su:

[http://www.eugeniopc.it/investigacion/DatiBoa/OndeCUGRIParthenopeMarzoeAprile\\_11.pdf](http://www.eugeniopc.it/investigacion/DatiBoa/OndeCUGRIParthenopeMarzoeAprile_11.pdf)

Nello stesso file sono riportati i dati tipici prodotti da un ondometro:  $H_s$ ,  $T_s$ , Direzione principale dello stato di mare campionato ogni 30°.