

## ONDE NEL PIANO



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI PARTHENOPE**  
**DIPARTIMENTO DI SCIENZE PER L'AMBIENTE**

### **PROGETTO TEMASAV**

*“Tecnologie e Monitoraggio Ambientale per la Sostenibilità delle Aree Vaste”*

Questi appunti contengono parti tratte dalle dispense

[www.dica.unict.it/users/efoti/ing\\_cost/ing\\_cost\\_lez.htm](http://www.dica.unict.it/users/efoti/ing_cost/ing_cost_lez.htm) del [Prof Enrico Foti](#) dell'Università di Catania. La responsabilità di ogni inesattezza derivante dall'adattamento è ovviamente solo mia

Le parti **marcate in blu** NON sono comprese nel programma del Master e servono per assicurare gli studenti più precisi -però male non fanno  
*Le parti in corsivo sono da svolgere autonomamente come esercizio*



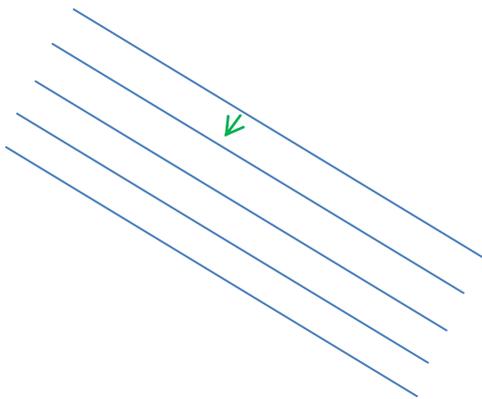
(foto Nuova Avioriprese Srl)

## **PREMESSA**

Quanto scritto nei paragrafi precedenti riguarda un'onda in una sola dimensione spaziale ( $x$ , con i simboli che abbiamo adottato), mentre nella realtà, la propagazione sulla superficie marina si sviluppa in due dimensioni. Dal punto di vista concettuale, la generalizzazione è semplice, se si considera che un'onda in una direzione generica si può proiettare su assi ortogonali  $x, y$  ed entrambe le componenti si possono trattare con le equazioni considerate finora, e le soluzioni si possono poi sommare, vista la linearità di tutta la trattazione. Questo approccio matematico viene seguito nei modelli di calcolo più complessi, di cui si dirà qualcosa nel seguito, e che inoltre superano anche in parte il limite dell'approssimazione lineare accettata finora.

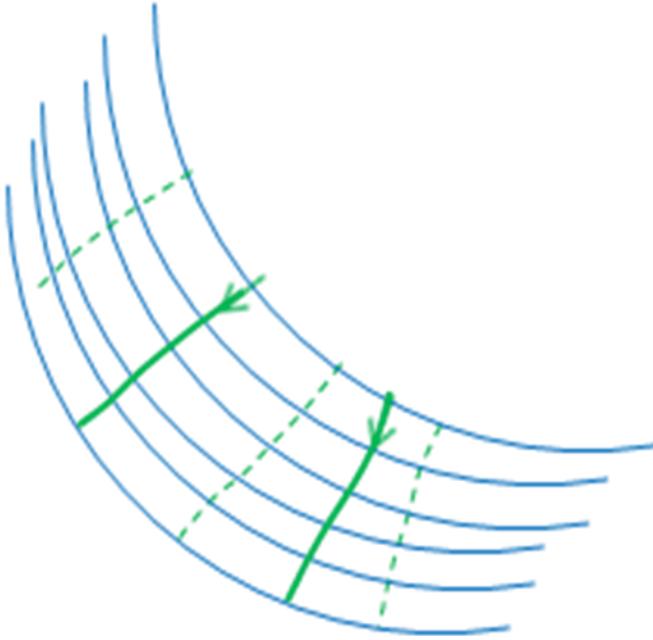
Considereremo invece per ora gli aspetti fisici del movimento dell'onda sulla superficie del mare, utilizzando concetti e strumenti matematici semplici, ma che hanno il merito di essere abbastanza intuitivi, e di costituire la base di strumenti progettuali ancor'oggi largamente usati.

Immaginiamo dunque un treno d'onda di Airy/Stokes1, che si muova sulla superficie del mare. Per visualizzarla dall'alto, immaginiamo di marcare tutti i punti di egual fase - ad esempio, tutte le creste, o tutti i cavi. Si ottengono così i "fronti d'onda" (anche: "piani d'onda");



se essi sono rettilinei è facile comprendere che tutto quanto studiato finora si applica tal quale - basta prendere come " $x$ " la normale ai piani d'onda (la direzione indicata dal vettore verde).

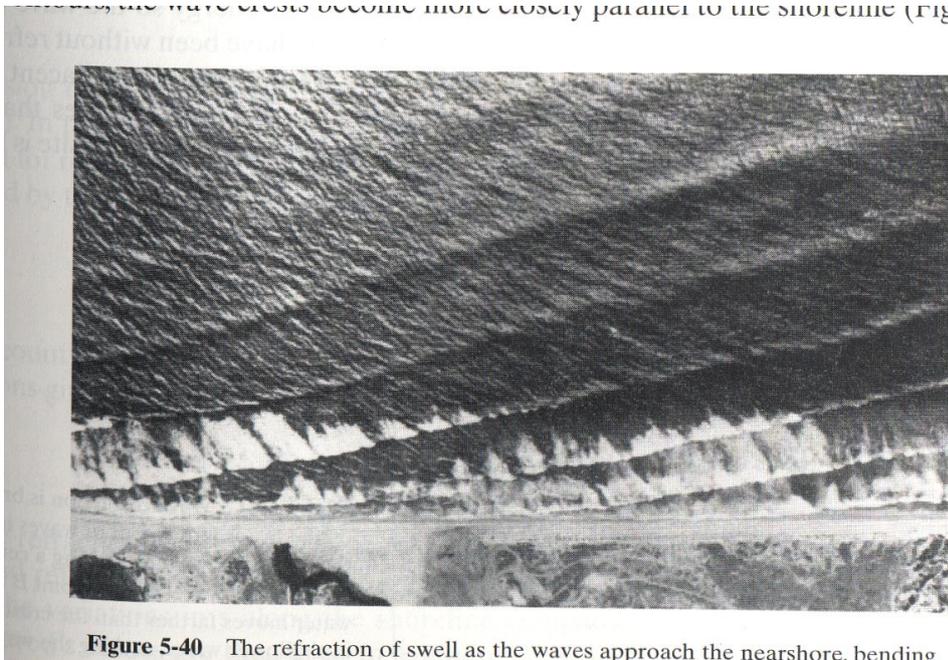
I piani d'onda possono (in blu nelle figure) però essere anche curvi: se la curvatura non è eccessiva, si i risultati dell'onda mondimensionale si possano trasferire, non più lungo una retta, bensì lungo una serie di curve ("raggi", linee verdi spesse nelle figure) ortogonali localmente ai fronti.



Si ipotizza quindi che ad intervalli non troppo lunghi sui fronti d'onda, e quindi lungo strisce (indicate con linee verdi tratteggiate) l'onda si comporti "quasi" come l'onda monodimensionale studiata finora. E' forse intuitivo che i fronti e i raggi ruotano perché, come visto nel capitolo precedente, la celerità dell'onda dipende dalla profondità. Dunque, quando le onde si muovono su una batimetria variabile in acque "non profonde" (si ricordi il significato di questa espressione) la celerità varia nei diversi punti del fronte e quindi questo si deforma. Questo effetto si chiama "rifrazione"

## RIFRAZIONE

... , the wave crests become more closely parallel to the shoreline (Fig. 5-40).



**Figure 5-40** The refraction of swell as the waves approach the nearshore, bending

(da Komar, 1998). Le onde, propagandosi dal largo verso la riva, ruotano e tendono a disporsi parallelamente alla riva. I raggi invece tendono ad avvicinarsi alla perpendicolare.

NOTA1: Tutto quanto segue, si riferisce a situazioni stazionarie: ma il concetto di “stazionario” nel moto ondoso si deve considerare relativo a scale di tempo lunghe rispetto al periodo d’onda, poiché evidentemente l’onda è di per se un fenomeno non stazionario

NOTA 2 In tutto quanto segue, si assume che non ci siano correnti, cioè movimenti costanti e lentamente variabili nel tempo della massa d’acqua.

NOTA 3: il periodo di un treno d’onda si mantiene costante, finché le onde non si rompono

Nel seguito si illustrerà come si ricostruisce il percorso delle onde nel loro avvicinarsi alla terra emersa individuando la linea lungo cui si propaga localmente l’onda – il cosiddetto *calcolo dei raggi d’onda* (una forma lievemente diversa va sotto il nome più tradizionale di “*calcolo dei piani d’onda*”, dove si considerano non i raggi ma le linee ad essi ortogonali, e cioè i fronti d’onda). Il vincolo di “curvatura non eccessiva” è essenziale

Concettualmente abbastanza semplici, questi calcoli sono basati sul legame tra lunghezza d’onda e profondità (l’equazione della dispersione vista prima) e sulla legge di *Snell* (analoga a quella dell’ottica), che lega la direzione  $\theta_1$  rispetto al gradiente della batimetria del raggio d’onda, ( in una batimetria rettilinea ed uniforme coincide con la perpendicolare alla costa) in un punto in cui la celerità è  $C_1$  con gli stessi parametri  $\theta_2$  e  $C_2$  in un altro punto generico:

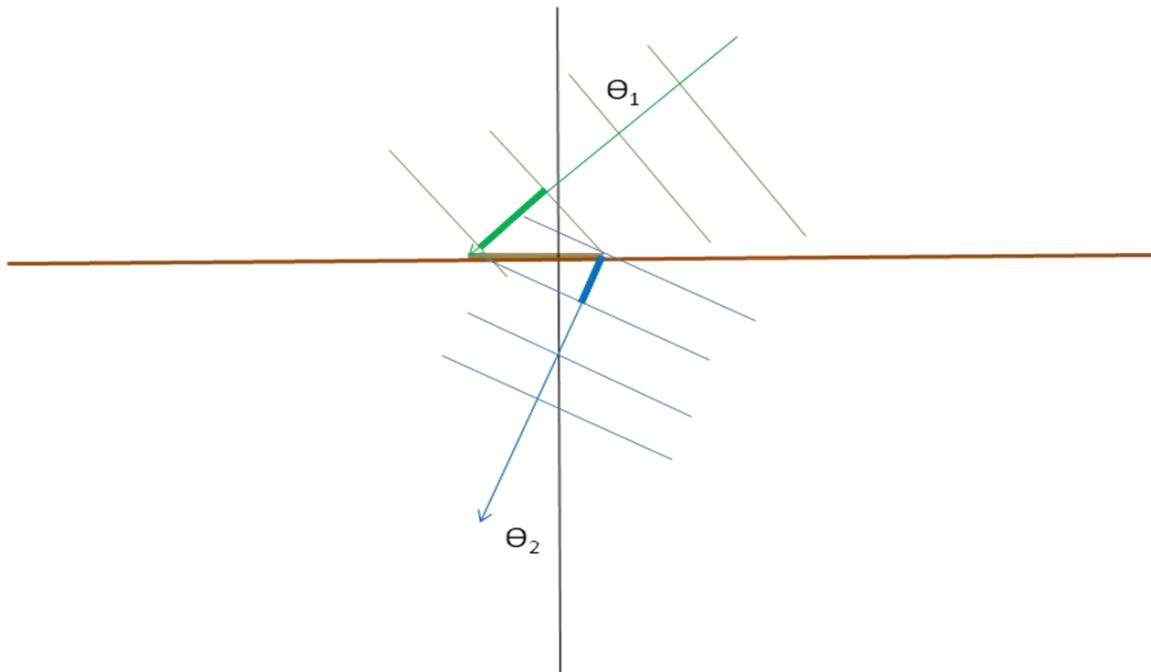
$$\frac{C_1}{\sin(\theta_1)} = \frac{C_2}{\sin(\theta_2)} \quad \text{ovvero} \quad C_2 = \frac{C_1 \sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1)}$$

Per comprendere quest’ effetto, conviene considerare una situazione semplice: *isobate rettilinee e parallele, ed una variazione di profondità schematizzata come uno scalino*. Poiché, come sappiamo, la celerità  $C$  dipende dalla profondità, questo provoca, nell’ avvicinarsi alla costa, la rotazione del vettore lungo cui si propaga il moto ondoso (**rifrazione**) secondo la legge indicata prima

La cosa è facilmente verificabile nella figura seguente: si ha una variazione di profondità e quindi di celerità da  $C_1$  a  $C_2$ . I fronti d’onda (linee sottili grigie e azzurre) formano con l’ isobata (marrone) un angolo  $\theta_1$ ; dopo la rotazione l’angolo è  $\theta_2$ . (NB: l’angolo  $\theta$  compreso tra fronti d’onda (e isobata) è eguale a quello compreso tra raggio d’onda e gradiente delle isobate).

I fronti d’onda ruotano ma la lunghezza d’onda (distanza tra due fronti ) lungo la linea marrone, proiettata lungo le due direzioni di propagazione deve dare le due lunghezze dei due rispettivi sistemi d’onda. Quindi  $L \sin\theta_1 = L_1$  e  $L \sin\theta_2 = L_2$  e dunque:

$L_1 / \sin\theta_1 = L_2 / \sin\theta_2$  . Poiché il periodo si conserva la stessa relazione vale per le celerità



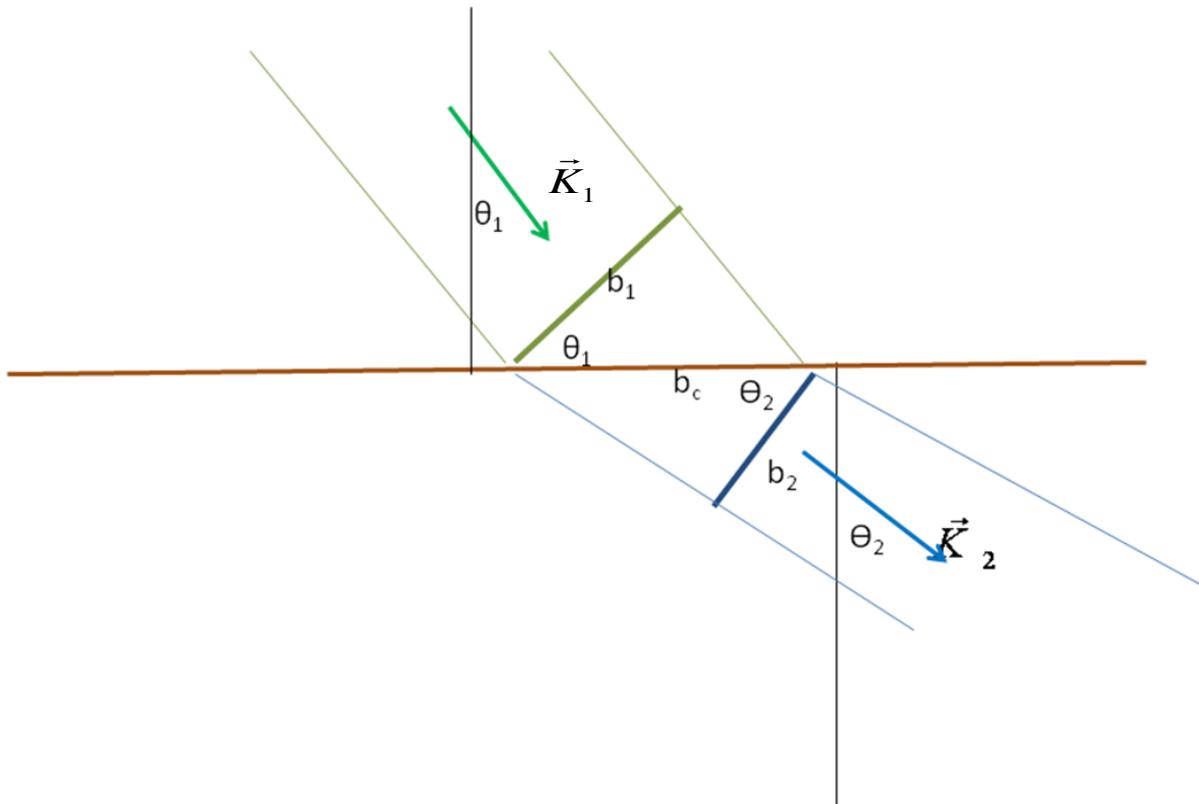
Questo fenomeno è importante perché:

-da una parte fa sì che la direzione d'arrivo dell'onda sulla costa e sulle opere sia diversa da quella al largo (in particolare, se la celerità diminuisce, come succede muovendosi verso profondità più basse) l'angolo diminuisce;

-dall'altra si verifica un effetto di convergenza o di divergenza dei raggi vicini con conseguente concentrazione o riduzione della densità di energia e quindi dell'altezza d'onda in moto verso il litorale.

Per comprendere questo secondo aspetto, conviene ancora considerare la stessa situazione schematica di prima. (la grafica è però differente). Il fronte d'onda di larghezza  $b_1$  (linea spessa verde), forma con una isobata un angolo  $\theta_1$ ; dopo la rotazione dovuta alla variazione di profondità la stessa distanza e lo stesso angolo sono  $b_2$  e  $\theta_2$  rispettivamente (NB: l'angolo  $\theta$  compreso tra fronte d'onda e isobate è eguale a quello compreso tra raggio d'onda e gradiente delle isobate)

$K_1$  e  $K_2$  sono i vettori d'onda



Considerando una striscia di larghezza  $b$  si ricava che è:  
 $b_c \cos \theta_1 = b_1$ ,  $b_c \cos \theta_2 = b_2$  e quindi:  
 $b_1 / \cos \theta_1 = b_2 / \cos \theta_2$

ovvero

si ha.  $b_1 / b_2 = \cos \theta_1 / \cos \theta_2$  ovvero  $b_2 = b_1 \cos \theta_2 / \cos \theta_1$

Nel caso illustrato sopra la striscia delimitata dal fronte d'onda si restringe, e poiché il flusso di energia resta costante, l'altezza d'onda deve aumentare.

A titolo di esempio, ed a scopo mnemonico, consideriamo che cosa succede ad un raggio d'onda che si dirige verso la spiaggia: La celerità diminuisce per fondali più bassi quindi  $\theta_2 < \theta_1$  e il raggio d'onda tende a diventare perpendicolare alla spiaggia. Vedere la figura, e *verificare numericamente* Considerare ancora che se  $\theta_2 < \theta_1$  segue che  $\cos \theta_2 > \cos \theta_1$  e dunque  $b_2 > b_1$

In formule: per verificare l'effetto sull'altezza d'onda, si impone che il flusso di energia di un treno d'onda si mantenga costante tra due sezioni  $b_1$  e  $b_2$ , generalizzando quanto si è visto nel caso monodimensionale (in questo caso la larghezza  $b$  varia):

$$F_1 = F_2$$

$$\rho * g / 8 * H_2^2 * Cg_2 * b_2 = \rho * g / 8 * H_1^2 * Cg_1 * b_1$$

e quindi

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{Gg_1}{Gg_2}} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \quad (**)$$

E quindi ancora

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{Gg_1}{Cg_2}} \sqrt{\frac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_2)}} \quad (***)$$

$$\sqrt{\frac{Gg_1}{Cg_2}} \text{ (è naturalmente il coefficiente di shoaling } K_s \text{ visto prima)}$$

Si pone

$$K_r = \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} = \sqrt{\frac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_2)}}$$

I due effetti (rifrazione e shoaling) coesistono e quindi il legame tra le altezze d'onda in due punti H1 e H2 è dato da

$$H = H_0 \cdot K_s \cdot K_r$$

E' comodo talvolta riferirsi ai valori al largo:  $H_0$ ,  $Cg_0$ , rispetto ai quali il valore H generico è quindi dato da

$$H = H_0 \sqrt{\frac{Gg_0}{Cg}} \sqrt{\frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}} \quad (***)$$

*Verificare numericamente*

*Ricordare i valori di C ed n per acque profonde ed acque basse!*

Questo stesso risultato è riportato nel Manuale dell' US Army Corps of Engineers: II-3-9 e seg., un riferimento molto importante per le applicazioni. Non è obbligatorio, ma è utile saperlo utilizzare

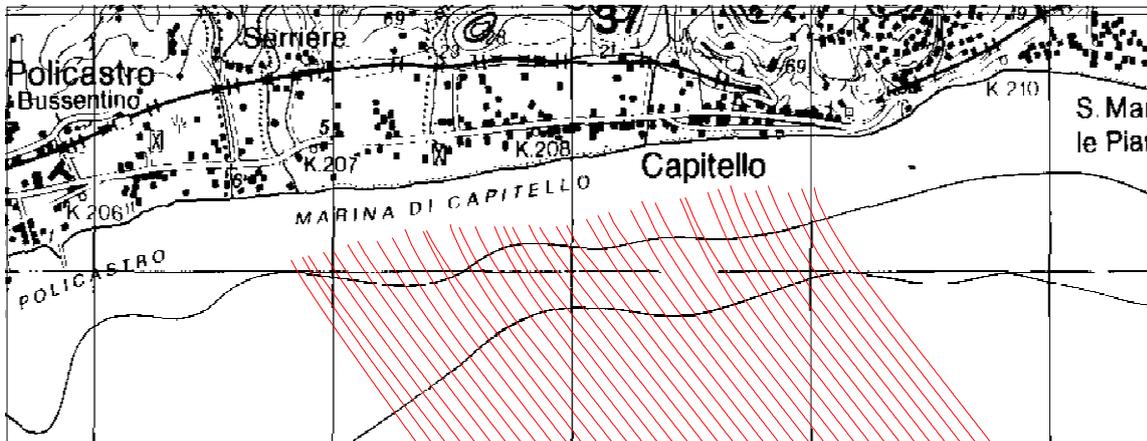
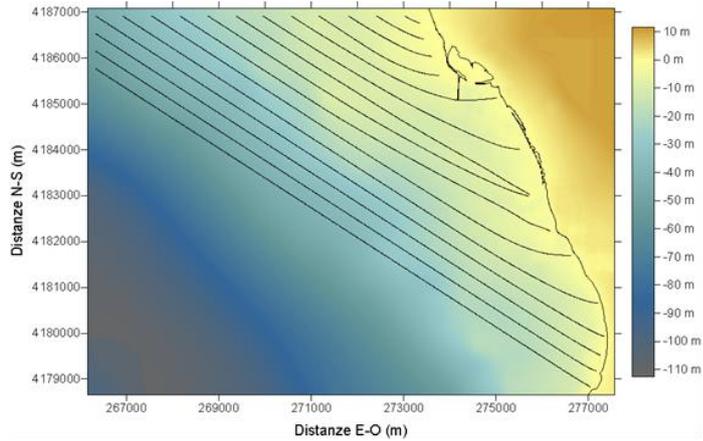
Risulta chiara quindi l'importanza di valutare la trasformazione dell'onda dal largo verso costa; pure essendo tutto quanto esposto sopra una semplice conseguenza della teoria lineare, i concetti fisici appaiono evidenti, e le tecniche descritte sono adeguate anche nella maggior parte dei casi reali.

Nella pratica, a causa delle inevitabili irregolarità della batimetria o delle interpolazioni numeriche, non è opportuno basarsi sul comportamento di soli due raggi, bensì conviene considerarne il comportamento medio su un congruo numero.

Lo shoaling, per semplici geometrie, si può trattare facilmente con le procedure svolte ad esercitazione sui fogli excel! Nei casi in cui la batimetria reale è più complessa, il calcolo della rifrazione richiede un software un po' più elaborato.

Il calcolo dei raggi d'onda congloba anche il calcolo dello shoaling e può essere impiegato con due metodi diversi:

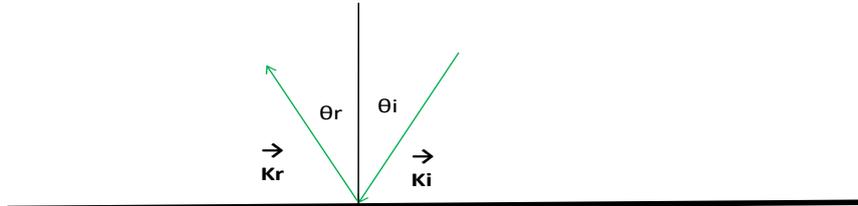
- diretto, e cioè dal largo verso costa; in questo caso si applica la tecnica per un certo numero di raggi, al largo paralleli ed equidistanti e si seguono verso terra fino alla rottura. Questo metodo è più accurato ma più gravoso, poiché deve essere ripetuto per ogni direzione (ad esempio, ad intervalli di  $5^\circ$  o  $10^\circ$ )
  - inverso, (o a ventaglio), in cui si individua un punto su basso fondale in vicinanza dell'opera, e si seguono i raggi d'onda in arrivo da diverse direzioni, verso il largo.
- Come si vede dai disegni – relativi ad calcolo diretti - in alcuni punti i raggi si avvicinano, ed in altre si allontanano



Questi calcoli sono inglobati nei sistemi software più recenti, di cui si parlerà in seguito

## RIFLESSIONE (BIDIMENSIONALE)

In presenza di coste alte o di opere a mare verticali sono importanti anche gli effetti di riflessione. Dal punto di vista planimetrico le onde sinusoidali di Airy seguono infatti le leggi dell'ottica geometrica (angolo di riflessione del vettore propagazione eguale all'angolo di incidenza)  $\theta_i = \theta_r$



La riflessione non è però mai totale, nel senso che l'energia (e cioè l'altezza d'onda  $H_r$ ) dell'onda riflessa è sempre minore di quella dell'onda incidente di altezza  $H_i$ ; si può definire un coefficiente di riflessione  $K_r$

$$H_r = H_i * K_r$$

Per una superficie perfettamente riflettente come ad esempio un muro verticale si ha  $K_r=1$  (o quasi). Una spiaggia con una pendenza ridotta risulta in generale un dissipatore di energia con  $K_r$  normalmente piccolo o nullo. Per altre strutture  $K_r$  può essere assegnato utilizzando formule empiriche o valori misurati, e questo criterio è generalmente adeguato per lo studio degli effetti del moto ondoso nei porti, a distanza di qualche lunghezza d'onda dalla parete riflettente.

## DIFFRAZIONE

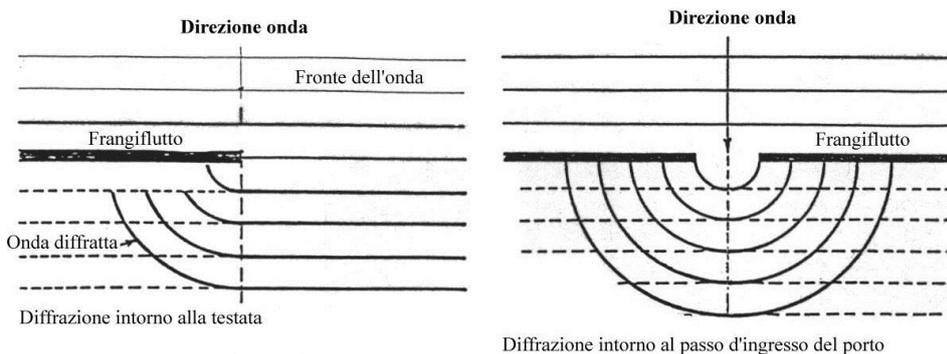


Gli effetti definiti fin qua (riflessione, rifrazione, shoaling) descrivono in maniera soddisfacente il comportamento di un campo di onde con fondale e con contorni gradualmente variati. Ma la propagazione per raggi non è accettabile in vicinanza di brusche variazioni dei contorni: dove per vicinanza si intende “dell’ordine della lunghezza d’onda” o inferiore.

Un tipico esempio è il campo di moto ondoso nella zona d’ombra a valle di un ostacolo che intercetta un treno d’onde incidenti. La parola – e l’analogia – “ombra” rende bene il senso, anche perché gli stessi fenomeni avvengono per le onde elettromagnetiche, e quindi per la luce. Se le onde continuassero a muoversi lungo un raggio ben definito, nella zona sottoflutto si avrebbe perfetta calma, mentre ai lati di essa le onde procederebbero senza cambiare né forma né altezza. Una situazione curiosa, e ovviamente fisicamente impossibile, come appunto la mezza tazza di tè di Alice. La diffrazione è l’effetto per cui il moto ondoso si modifica per la presenza di ostacoli e non avviene più lungo raggi e creste. Non esiste in questo caso una direzione di propagazione ben definita né l’altezza d’onda  $H$  evolve gradualmente lungo un raggio d’onda. Il fenomeno è totalmente bidimensionale.

La foto aerea all’inizio del capitolo mostra vari situazioni complesse tra cui anche quella della diffrazione.

La figura successiva mostra invece due esempi molto semplici.



Il calcolo della diffrazione è importante, per esempio, per la determinazione delle altezze d’onda in un porto o in un bacino protetto ed è quindi essenziale nella progettazione dei bacini portuali

Per lo studio di questi problemi, si assume dunque una funzione  $f(x,y)$  detta “**funzione d’onda**”, che ha sostanzialmente il ruolo di un’altezza d’onda locale, relativa a ciascun punto  $x,y$ . L’altezza istantanea d’acqua  $\eta$  assume allora la forma

$$\eta = a \cdot f(x, y) \cdot \cos(kx - \sigma t + \psi)$$

in cui  $f(x,y)$  (funzione d'onda) descrive le variazioni sul piano orizzontale di  $\eta$  rispetto al livello di quiete ed  $a$  è l'ampiezza d'onda di riferimento (ad esempio  $H/2$ , essendo  $H$  l'altezza d'onda al largo),  $\sigma$  è la frequenza.

La funzione d'onda  $f(x,y)$  verifica l'equazione:

$$\nabla \cdot (C C_g \nabla f) + \sigma^2 \left( \frac{C_g}{C} \right) f = 0$$

(Mild Slope Equations, Berkoff 1972)

Con

$C$  = velocità di fase

$C_g$  = velocità di gruppo =  $C \cdot n$

$k$  = numero d'onda.

L'equazione sopra rappresentata è un'equazione di tipo ellittico (devono essere assegnate condizioni al contorno su tutta la frontiera) e si risolve con procedimenti numerici. Le condizioni al contorno rappresentano lo stato di mare all'esterno della zona considerata:

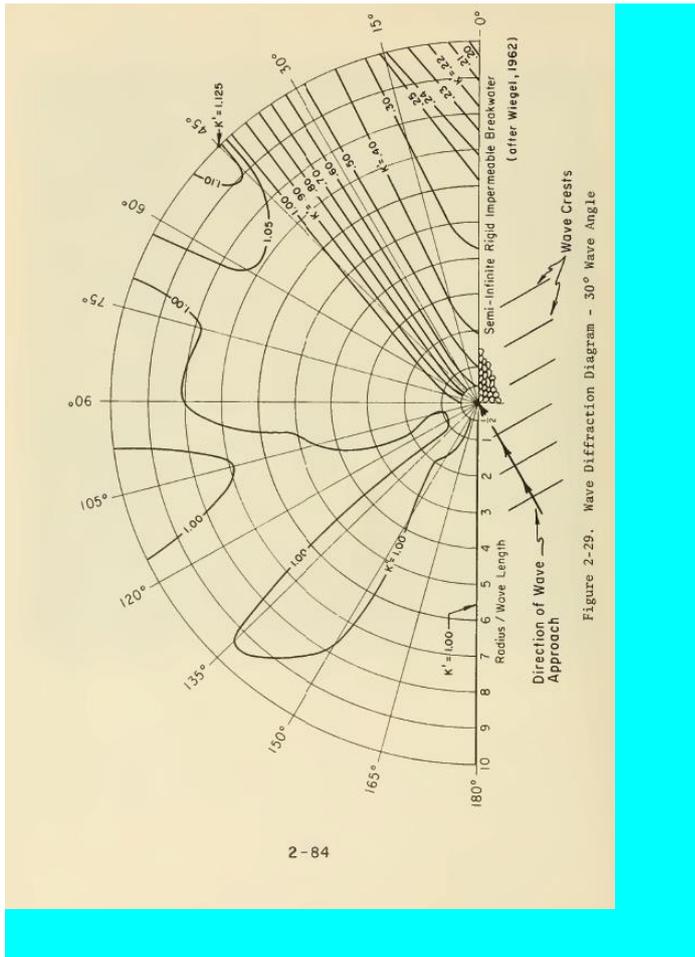
Una volta trovata la  $f(x,y)$  e quindi la  $\eta(x,y)$ , gli altri elementi di interesse (ad es. le velocità, le pressioni) si trovano attraverso funzioni della sola  $z$ , in maniera analoga a quanto visto per le onde unidirezionali.

La funzione  $Z(z)$  può essere espressa nella forma:

$$Z(z) = - \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}$$

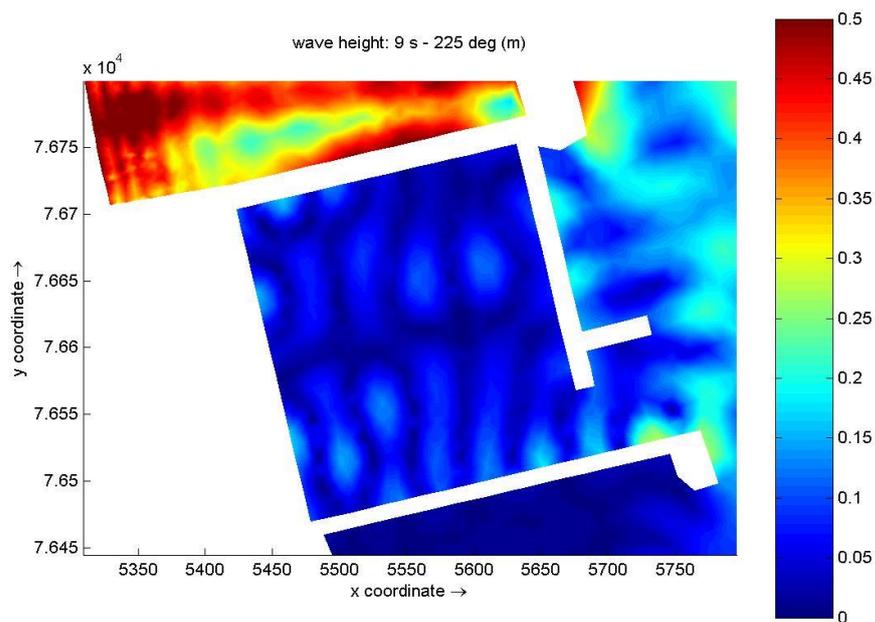
simile a quella relativa alle onde unidirezionali, che fornisce la variazione dei parametri idrodinamici con la profondità  $z$ ;

Tradizionalmente si usavano dei diagrammi che forniscono le soluzioni per geometrie semplici ma di interesse applicativo: ad esempio, un molo su cui arriva un fronte d'onda con una certa direzione:



Questi diagrammi (di Wiegener) non sono piu' in uso a causa della diffusione di sistemi software specializzati. Sono però utili per formarsi un'idea fisica dei fenomeni.

Il seguente esempio è relativo ad un caso reale risolto con il software PHAROS prodotto da Delft Hydraulics: si nota l'attenuazione dell'altezza d'onda nella zona protetta dal molo e le zone di riflessione antistanti il molo (molto riflettente)



Altre immagini e un esempio applicativo si trovano su

<http://www.eugenioipc.it/research/papers/PresentazioneEPCetalHamamet7.pdf>